

1. Первообразная и границы

Gegeben ist $f(x)=3x^2-2x$. Bestimmen Sie alle Stammfunktionen von f und berechnen Sie das bestimmte Integral von -1 bis 2 . Überprüfen Sie Ihre Stammfunktion durch Ableiten.

Дана $f(x)=3x^2-2x$. Найдите все первообразные и вычислите определённый интеграл от -1 до 2 . Проверьте первообразную дифференцированием.

Для $3x^2$ первообразная равна x^3 , для $-2x$ — $-x^2$. Поэтому все первообразные имеют вид $F(x)=x^3-x^2+C$, где C . Производная $F(x)=3x^2-2x$ возвращает исходную функцию.

Для вычисления интеграла выберем $C=0$. Тогда $F(2)=8-4=4$, а $F(-1)=-1-1=-2$. Получаем $\int_{-1}^2 (3x^2-2x) dx = 4 - (-2) = 6$.

Ответ 6 — значение определённого интеграла. В условии не спрашивали геометрическую площадь, поэтому дополнительные модули или разбиение по нулям здесь не требуются.

Если получилось 2 , проверьте скобки в $4 - (-2)$. Если в окончательном числовом ответе осталось $+C$, выпишите $(F(2)+C) - (F(-1)+C)$ и сократите постоянные.

2. Экспонента: коэффициент в показателе

Gegeben ist $f(x)=e^{2x}$. Bestimmen Sie eine Stammfunktion und berechnen Sie das Integral von 0 bis $\ln(3)/2$. Überprüfen Sie die Stammfunktion durch Ableiten.

Дана $f(x)=e^{2x}$. Найдите первообразную и вычислите интеграл от 0 до $\ln(3)/2$. Проверьте первообразную производной.

Производная e^{2x} равна $2e^{2x}$. Поэтому первообразная исходной функции — $F(x)=(1/2)e^{2x}$. Проверка: $F(x)=(1/2) \cdot 2e^{2x}=e^{2x}$.

Обозначим $L=\ln(3)/2$. Тогда $2L=\ln 3$ и $e^{2L}=3$. На нижней границе $e^0=1$.

$I=F(L)-F(0)=3/2-1/2=1$. Для всех первообразных можно приписать $+C$; в определённом интеграле эта постоянная сократится.

Ответ 2 вместо 1 обычно означает потерянный коэффициент $1/2$. Проверка производной обнаруживает это до подстановки границ.

3. Интеграл и геометрическая площадь

Gegeben ist $f(x)=x^2-2x$ im Intervall $[0,3]$. Berechnen Sie a) das bestimmte Integral und b) den Flächeninhalt zwischen dem Graphen, der x-Achse und den Geraden $x=0$ und $x=3$. Skizzieren Sie die Teilflächen und erklären Sie den Unterschied zwischen den Ergebnissen.

Дана $f(x)=x^2-2x$ на $[0,3]$. Вычислите а) определённый интеграл и б) площадь между графиком, осью x и прямыми $x=0$ и $x=3$. Сделайте эскиз частей области и объясните различие ответов.

Первообразная $F(x)=x^3/3-x^2$. На границах $F(0)=0$ и $F(3)=9-9=0$, поэтому $\int_0^3 (x^2-2x) dx=0$.

Нули функции — 0 и 2. На $(0,2)$ график лежит под осью x , на $(2,3)$ — над ней. Для эскиза отметьте также вершину $(1|-1)$ и точку $(3|3)$. Две части касаются в $(2|0)$.

$F(2)=8/3-4=-4/3$. Левая площадь $A_1=-[F(2)-F(0)]=4/3$ FE. Правая площадь $A_2=F(3)-F(2)=4/3$ FE. Вместе $A=8/3$ FE.

В интеграле вклады $-4/3$ и $+4/3$ сократились. Для площади оба вклада положительны. Модуль одного итогового интеграла дал бы $|0|=0$ и потерял бы обе области.

Если площадь получилась 0, обозначьте на эскизе A_1 и A_2 и отдельно запишите знак каждого интеграла. Если получилось $4/3$, проверьте, посчитаны ли обе части.

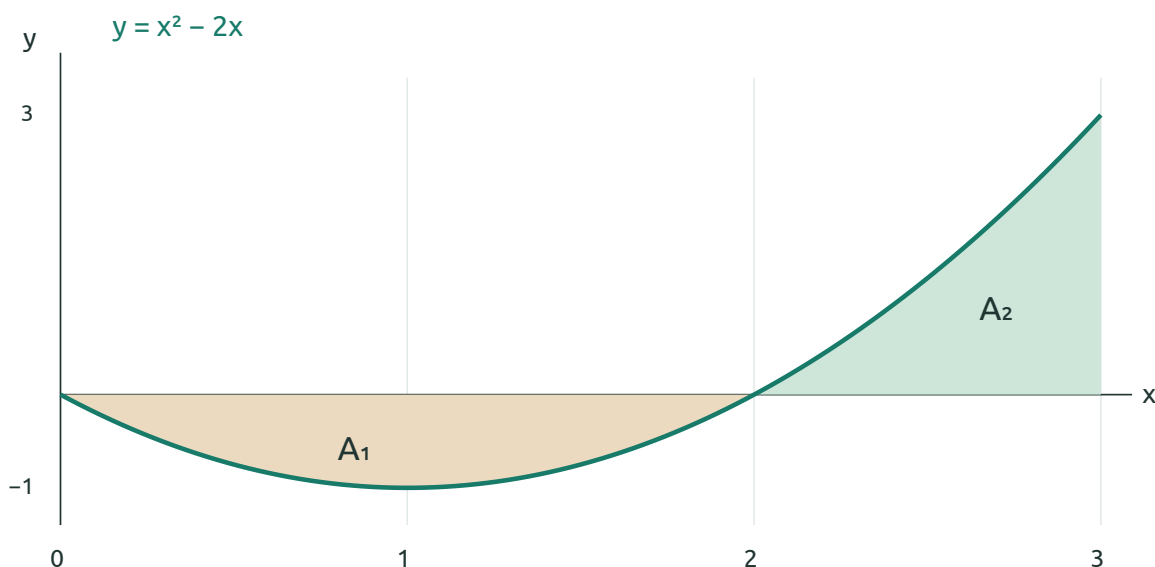


График x^2-2x : на $(0,2)$ область ниже оси x , на $(2,3)$ — выше. Интеграл учитывает знаки; площадь складывает обе части.

4. Площадь между двумя графиками

Die Graphen $f(x)=2x$ und $g(x)=x^2$ schließen ein endliches Flächenstück ein. Bestimmen Sie die Schnittpunkte, skizzieren Sie die Fläche und berechnen Sie ihren Inhalt.

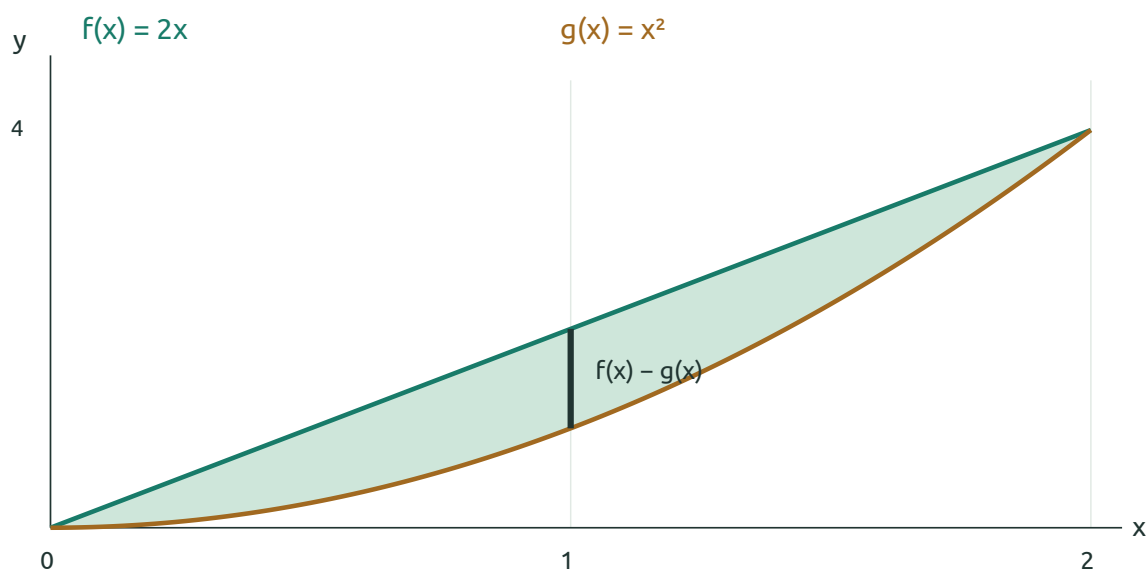
Графики $f(x)=2x$ и $g(x)=x^2$ ограничивают конечную область. Найдите точки пересечения, сделайте эскиз и вычислите площадь.

Уравнение $2x=x^2$ равносильно $x(x-2)=0$. Точки пересечения: $(0|0)$ и $(2|4)$. Именно они задают границы замкнутой области.

На $0 < x < 2$ разность $2x - x^2 = x(2-x)$ положительна, поэтому сверху находится f , снизу g . Высота полоски равна $f(x) - g(x)$.

$A = \int_0^2 (2x - x^2) dx = [x^2 - x^3/3]_0^2 = 4 - 8/3 = 4/3$ FE. Отдельное разбиение не требуется: внутри этого интервала графики не меняются местами.

Если получилось $-4/3$, переставлены верхний и нижний графики. Проверяйте их порядок до интегрирования, например подстановкой $x=1$.



На интервале $(0,2)$ прямая $y=2x$ выше параболы $y=x^2$. Высота полоски равна $2x - x^2$.

5. Та же область: теперь вращение

Die von $f(x)=2x$ und $g(x)=x^2$ eingeschlossene Fläche rotiert um die x -Achse. Stellen Sie einen Querschnitt senkrecht zur x -Achse dar und berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers.

Область между $f(x)=2x$ и $g(x)=x^2$ вращается вокруг оси x . Изобразите сечение, перпендикулярное оси x , и найдите объём тела вращения.

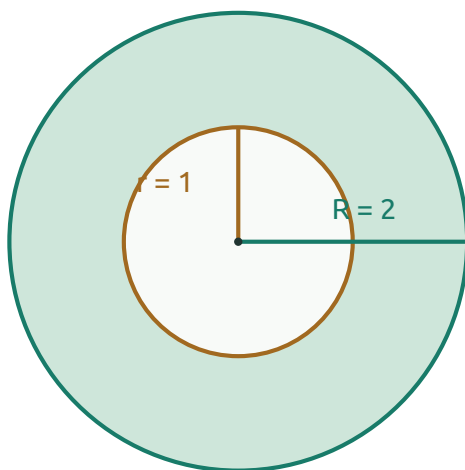
На $[0,2]$ внешний радиус $R=2x$, внутренний $r=x^2$. Площадь одного сечения равна площади большого круга минус площадь отверстия: $S(x)=\pi(R^2-r^2)=\pi(4x^2-x^4)$.

$$V=\pi \int_0^2 (4x^2-x^4) dx = \pi \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{x^5}{5} \right]_0^2.$$

$V=\pi(32/3-32/5)=64\pi/15 \approx 13,404$ VE. В отличие от предыдущей задачи мы складывали площади сечений, поэтому получили кубические единицы.

При $x=1$ радиусы равны 2 и 1, площадь кольца — $\pi(4-1)=3\pi$. Формула $\pi(R-r)^2$ дала бы π : она строит круг с радиусом, равным толщине кольца, и теряет геометрию сечения.

Для вращения вокруг другой оси радиусы пришлось бы определять заново как расстояния до этой оси. Здесь разность квадратов применима, поскольку область целиком лежит по одну сторону оси x .



Сечение при $x=1$: внешний радиус $R=2$, внутренний $r=1$. Вращается отрезок от r до R ; белая середина остаётся отверстием.

6. Экзамен: область между экспонентами

Gegeben sind $f(x)=e^{2x}$ und $g(x)=4-3e^{-2x}$. Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Graphen. Die beiden Graphen begrenzen ein endliches Flächenstück. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der bei Drehung dieser Fläche um die x -Achse entsteht. Auf allen Achsen gelten dieselben Längeneinheiten.

Даны $f(x)=e^{2x}$ и $g(x)=4-3e^{-2x}$. Найдите точки пересечения графиков. Ограниченная ими конечная область вращается вокруг оси x . Вычислите объём полученного тела. Масштаб единиц одинаков по всем осям.

Из $e^{2x}=4-3e^{-2x}$ после замены $t=e^{2x}>0$ получаем $t=4-3/t$. Умножение на t даёт $t^2-4t+3=(t-1)(t-3)=0$. Поэтому $x_1=0$ и $x_2=\ln(3)/2$. Подстановка в f даёт точки $S_1(0|1)$ и $S_2(\ln(3)/2|3)$.

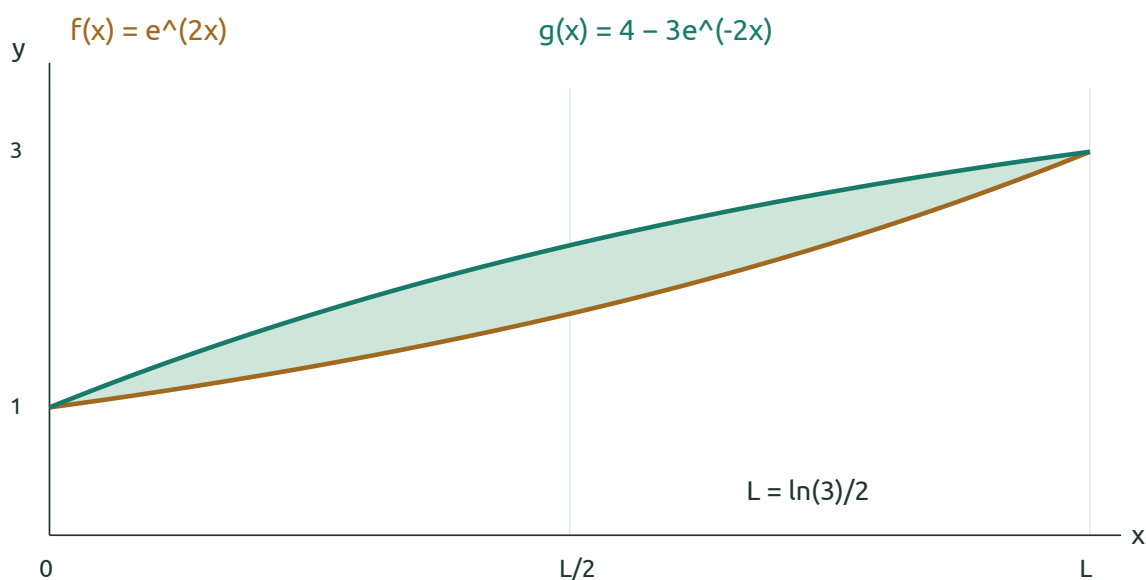
Между пересечениями $1<t<3$. Разность $g-f=4-3/t-t=-(t-1)(t-3)/t$ положительна. Обе функции положительны, поэтому при вращении вертикального отрезка возникает кольцо: внешний радиус $R=g(x)$, внутренний $r=f(x)$.

Объём $V=\pi \int_0^L [(4-3e^{-2x})^2 - (e^{2x})^2] dx$, где $L=\ln(3)/2$. Раскрытие квадратов даёт $V=\pi \int_0^L (16-24e^{-2x}+9e^{-4x}-e^{4x}) dx$. Вычитаем квадраты радиусов; квадрат разности $(g-f)^2$ описывал бы другое сечение.

Первообразная выражения в скобках: $H(x)=16x+12e^{-2x}-(9/4)e^{-4x}-(1/4)e^{4x}$. На верхней границе $e^{-2L}=1/3$, $e^{-4L}=1/9$ и $e^{4L}=9$. Поэтому $H(L)=8\ln(3)+4-1/4-9/4=8\ln(3)+3/2$. На нижней границе $H(0)=12-9/4-1/4=19/2$.

$V=\pi[8\ln(3)+3/2-19/2]=8\pi(\ln(3)-1)\approx 2,478$ VE. Результат положителен. В точках пересечения радиусы совпадают, так что площадь кольца там равна нулю; внутри интервала она положительна.

Если объём отрицателен, проверьте порядок радиусов. Если появился $(g-f)^2$, нарисуйте два концентрических круга и вычтите их площади. Если потерялся множитель $1/2$ или $1/4$, проверьте $H(x)$ дифференцированием.



Область ограничена пересечениями $x=0$ и $x=\ln(3)/2$. Между ними g выше f ; обе кривые находятся над осью вращения.