

Kurvendiskussion

Карта исследования функции для EPM

Посмотрим на функцию $f(x) = x^2 - 2x$. Несколько значений помогут отметить точки, но между ними график ещё нужно провести. Где он опускается, где поворачивает вверх и может ли уйти ниже найденной точки?

Ответы уже заключены в формуле. Попробуем прочесть их: сначала преобразуем выражение так, чтобы стала видна форма параболы. Когда рисунок станет понятнее, свяжем его с производной. Такое выяснение свойств функции по-немецки называется **Kurvendiskussion**.

Как формула показывает форму параболы

Выделим квадрат: $f(x) = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$. Квадрат неотрицателен, поэтому значение функции не может быть меньше -1 . Равенство достигается при $x = 1$: на графике это нижняя точка $T(1 | -1)$, или **Tiefpunkt**. Мы нашли её по формуле, ещё не вычисляя производных.

Теперь найдём пересечения с горизонтальной осью. На ней высота равна нулю, поэтому решаем $x^2 - 2x = 0$. Выносим x : из $x(x - 2) = 0$ получаем $x = 0$ или $x = 2$. Это нули функции (**Nullstellen**); на рисунке им соответствуют $N_1(0|0)$ и $N_2(2|0)$. Любое вещественное x можно подставить в многочлен, так что область определения здесь $D_f = \mathbb{R}$.

По обе стороны от $x = 1$ одинаковые отступы дают одинаковую высоту: $f(1 + h) = f(1 - h) = h^2 - 1$. Поэтому парабола симметрична относительно прямой $x = 1$. Отметим найденные три точки. Слева от минимума кривая опускается, справа поднимается; при удалении в обе стороны её высота растёт без ограничения.

Это изменение направления можно проверить производной. Она показывает наклон касательной и обозначается f' . По правилам $(x^2)' = 2x$ и $(cx)' = c$ получаем $f'(x) = 2x - 2$. На всём интервале $(-\infty, 1)$ она отрицательна, а на $(1, \infty)$ положительна. Так вычисление подтверждает увиденное: функция строго убывает, затем строго возрастает. Вторая производная $f''(x) = 2 > 0$ показывает, что наклон всё время увеличивается; смены выпуклости и точек перегиба здесь нет. Функция стремится к $+\infty$ при $x \rightarrow \pm\infty$; разрывов и прямых-асимптот у этой параболы нет.

Полученный вывод по-немецки можно записать так: *Die Funktion ist auf $(-\infty, 1)$ streng monoton fallend und auf $(1, \infty)$ streng monoton steigend. Der Tiefpunkt ist $T(1 | -1)$. Es gibt keinen Wendepunkt.*

☒ Остановка 1: повтори на другой параболе

Для $q(x) = (x+1)^2 - 4$ найди нули, минимум и интервалы монотонности. Объясни, почему найденный минимум глобальный. Ключи к остановкам находятся в конце.

У параболы формула определена при любом x , поэтому исследование нигде не прерывалось. У дроби или корня могут появиться запрещённые значения. Сначала найдём их: они определяют, на каких участках вообще можно изучать график.

1 Область определения (Definitionsmenge)

Definitionsmenge D_f — это все значения x , при которых функция существует. Если значение x запрещено, его нельзя использовать дальше в исследовании.

Проверяем тип функции:

- дробь: знаменатель не должен быть равен нулю;
- корень чётной степени: выражение под корнем должно быть ≥ 0 ;
- логарифм: аргумент должен быть > 0 ;
- многочлен без дополнительных ограничений задачи: $D_f = \mathbb{R}$.

Пример записи:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

Знак $\setminus$ читается «без»: все вещественные числа, кроме 2.

Частая ошибка.

Нельзя сначала находить производные, а потом вспоминать про область определения. Запрещённые точки делят интервалы монотонности и кривизны: через разрыв нельзя записывать один общий интервал.

ex Пример

Если

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2},$$

то $x = 2$ запрещён, потому что знаменатель равен нулю.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

2 Нули функции (Nullstellen)

Nullstelle — это значение x , при котором функция равна нулю. Соответствующая точка графика лежит на оси x ; график может пересекать ось или касаться её.

Решаем уравнение:

$$f(x) = 0.$$

Если функция дробная, обычно достаточно приравнять числитель к нулю, но только после проверки, что знаменатель в этой точке не равен нулю.

Если $x = a$ — ноль функции, точка записывается так:

$$N(a|0).$$

Частая ошибка.

Если функция дробная, сначала проверь, что найденный x не запрещён. Запрещённая точка не может быть Nullstelle.

☒ Остановка 2: сначала область, потом нули

Для $h(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ запиши область определения и все нули. Можно ли после сокращения вернуть $x = 1$ в область исходной функции? Затем переходи к объяснению устранимого разрыва ниже.

3 Полюсы и асимптоты

Что такое Polstelle?

Для рациональной функции **Polstelle** — исключённое значение $x = a$, у которого оба односторонних предела бесконечны; их знаки могут различаться.

Для дроби:

1. найди запрещённые значения из знаменателя;
2. проверь, можно ли сократить общий множитель;
3. если сокращённое выражение имеет конечный предел, это **hebbare Lücke**; исходная функция всё ещё не определена в исключённой точке;
4. если функция уходит к бесконечности, это Polstelle.

Вертикальная асимптота записывается так:

$$x = a.$$

Частая ошибка.

Не каждое запрещённое значение автоматически является Polstelle. Сначала проверь сокращение.

ex Запрещённая точка, но не Polstelle

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}.$$

$x = 1$ запрещён в исходной функции. При $x \neq 1$ имеем $f(x) = x + 1$, и $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$; сокращение не возвращает точку в D_f . Это **hebbare Lücke**, не Polstelle, поэтому вертикальной асимптоты $x = 1$ нет.

Какие бывают асимптоты?

Asymptote — это прямая, к которой график приближается. В этом конспекте нас интересуют именно прямые: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

Основные типы:

- **senkrechte Asymptote**: $x = a$, обычно из Polstelle;
- **waagrechte Asymptote**: $y = c$, поведение при $x \rightarrow \pm\infty$;
- **schräge Asymptote**: $y = kx + d$, $k \neq 0$, если $f(x) - (kx + d) \rightarrow 0$ в рассматриваемом направлении.

Для рациональной функции сравни степени числителя и знаменателя:

- степень числителя меньше: $y = 0$;
- степени равны: отношение старших коэффициентов;
- степень числителя не меньше степени знаменателя: делаем Polynomdivision; остаток показывает, к какому полиному стремится функция. При разности степеней 1 это наклонная прямая, при большей разности — полиномиальная асимптота.

Как записывать поведение около Polstelle?

Около вертикальной асимптоты важно смотреть на функцию с двух сторон: слева и справа.

Если Polstelle находится при $x = a$, проверяем:

$$x \rightarrow a^- \quad \text{и} \quad x \rightarrow a^+.$$

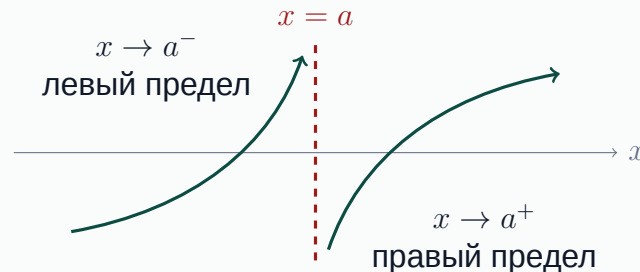
Знак « $-$ » над a означает приближение по значениям меньше a , знак « $+$ » — по значениям больше a . Он не задаёт знак самой функции. Например, у $1/(x - 2)$ знаменатель слева от 2 отрицателен и близок к нулю, поэтому значения уходят к $-\infty$; справа знаменатель положителен, и значения уходят к $+\infty$. Результат может быть разным:

$$f(x) \rightarrow +\infty \quad \text{или} \quad f(x) \rightarrow -\infty.$$

Пример записи:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty.$$

☒ Polstelle: смотри слева и справа



4 Поведение на бесконечности

Мы смотрим, что происходит с функцией далеко справа и далеко слева:

$$x \rightarrow +\infty, \quad x \rightarrow -\infty.$$

Это помогает найти горизонтальные и наклонные асимптоты.

Для рациональных функций часто достаточно сравнить степени. Для других функций смотрим главный член или предел.

Если

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c,$$

то справа есть горизонтальная асимптота:

$$y = c.$$

Аналогично проверяем $x \rightarrow -\infty$.

Частая ошибка.

Не всегда поведение при $+\infty$ и $-\infty$ одинаковое. Проверь обе стороны, если задача этого требует.

ex Наклонная асимптота

Если после Polynomdivision получается:

$$f(x) = kx + d + \frac{r(x)}{q(x)}$$

и

$$\frac{r(x)}{q(x)} \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \pm\infty,$$

то при $k \neq 0$ наклонная асимптота:

$$y = kx + d.$$

5 Производная

Зачем нужна первая производная?

Ableitung $f'(x)$ показывает наклон касательной там, где производная существует и конечна. Значение $f(x)$ отвечает за высоту графика, а знак $f'(x)$ помогает определить, как эта высота меняется. Возьмём две близкие точки с абсциссами x и $x + h$. Наклон соединяющей их прямой равен $[f(x + h) - f(x)]/h$. Для нашей параболы эта дробь упрощается до $2x - 2 + h$. Когда h стремится к нулю, наклон стремится к $2x - 2$ — значению производной.

У уже разобранной параболы $f(x) = x^2 - 2x$ при $x = \frac{3}{2}$ получаем $f(\frac{3}{2}) = -\frac{3}{4}$, но $f'(\frac{3}{2}) = 1 > 0$. График ниже оси x , хотя на интервале $(1, +\infty)$ функция возрастает. Поэтому для монотонности исследуем знак производной, а не самой функции.

Если производная существует на всём интервале, то:

$$f'(x) > 0 \text{ на интервале} \Rightarrow f \text{ возрастает}$$

$$f'(x) < 0 \text{ на интервале} \Rightarrow f \text{ убывает}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \text{стационарная точка; тип ещё проверяем}$$

Производная сама по себе не является ответом. После неё обязательно делаем вывод:

f ist monoton steigend/fallend ...

$H(\dots|\dots)$ или $T(\dots|\dots)$.

6 Монотонность

Как найти Monotonie?

Monotonie описывает интервалы, где функция возрастает или убывает. Для этого нужен знак первой производной. Производную используем там, где она существует; точки без производной и границы области рассматриваем отдельно. Для вывода об экстремуме по смене знака дополнительно нужна непрерывность функции в проверяемой точке.

1. Найди $f'(x)$.
2. Реши $f'(x) = 0$.
3. Отметь границы D_f и точки из D_f , где f' не существует.
4. Раздели область определения на интервалы.
5. Проверь знак $f'(x)$ на каждом интервале.

Запись:

f ist monoton steigend für $x \in (a, b) \cup (c, d)$.

f ist monoton fallend für $x \in (e, g)$.

Если интервал только один, знак $\cup$ не нужен. Знак $\cup$ читается «объединение»: x принадлежит одному из указанных интервалов. Здесь мы описываем монотонность на каждом интервале отдельно; значения функции по разные стороны разрыва друг с другом не сравниваются.

Частая ошибка.

Нельзя писать только $f'(x) > 0$: на экзамене нужен интервал, где это выполняется.

Е Про запрещённые точки

Запрещённые точки не являются Extremstellen, но они разрезают область определения. Поэтому для Monotonie делим область по нулям f' , по точкам из D_f без производной и по границам области. Например, у $f(x) = |x|$ минимум в 0, хотя $f'(0)$ не существует.

ex Пример

Если знак f' такой:

$$(-\infty, -1) : +, \quad (-1, 2) : -, \quad (2, \infty) : +,$$

то функция:

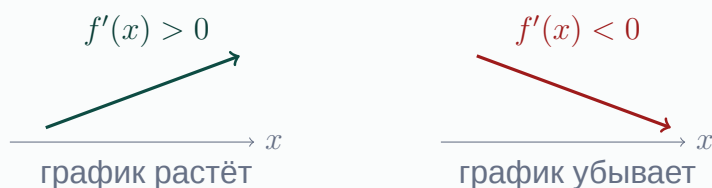
f ist monoton steigend für $x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$,

f ist monoton fallend für $x \in (-1, 2)$.

⊕ Как из знаков получить интервалы

Интервал	$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, \infty)$
Знак f'	+	-	+
Вывод	steigt	fällt	steigt

✓ $f' > 0$ и $f' < 0$



Знак f' переводится не в одну точку, а в интервалы роста и убывания.

7 Точки экстремума

✓ Остановка 3: знак производной

Для $p(x) = x^3 - 3x$ дано $p'(x) = 3(x - 1)(x + 1)$. Самостоятельно составь таблицу знаков и запиши интервалы строгой монотонности. При переходе к следующему методу используй эту таблицу, чтобы назвать тип экстремума при $x = -1$ и $x = 1$.

Что такое Extremstelle и Extrempunkt?

Extremstelle — это только значение x . **Extrempunkt** — это полная точка на графике с координатами $(x|y)$. Локальный максимум сравнивают с близкими точками графика: рядом выше ничего нет. Глобальный максимум сравнивают со всей областью определения. Поэтому на другой ветви графика могут быть значения выше локального максимума. Для минимумов различие такое же, только сравниваем, где значение меньше.

Если функция дифференцируема в рассматриваемой области, сначала ищем кандидатов:

$$f'(x) = 0.$$

Если в точке из D_f производная не существует, эту точку тоже нельзя пропускать: там также возможен Extrempunkt. Потом проверяем смену знака f' ; на закрытом интервале границы проверяются отдельно.

если $f' : + \rightarrow -$, то Hochpunkt

если $f' : - \rightarrow +$, то Tiefpunkt

После этого считаем:

$$y = f(x_0).$$

Частая ошибка.

$f'(x_0) = 0$ — это ещё не доказательство Extrempunkt. Нужна смена знака или другой достаточный тест.

Как использовать вторую производную для Extrempunkte?

Вторая производная может быстро определить тип Extrempunkt, но только если уже известно, что $f'(x_0) = 0$. Если $f''(x_0) > 0$, то вблизи этой стационарной точки наклон проходит через нуль от отрицательных значений к положительным: сначала график опускается, затем поднимается. Получается минимум. При $f''(x_0) < 0$ переход обратный.

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) > 0 \Rightarrow T(x_0|f(x_0)).$$

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) < 0 \Rightarrow H(x_0|f(x_0)).$$

Частая ошибка: если $f''(x_0) = 0$, этот тест не решает задачу: возвращаемся к проверке смены знака f' .

8 Вторая производная и кривизна

Что показывает вторая производная?

$f''(x)$ показывает, как меняется наклон графика. Через неё мы определяем кривизну и Wendepunkte. Интуитивно: положительная вторая производная загибает график вверх, отрицательная — вниз. Это не то же самое, что рост и убывание. У $f(x) = x^2$ слева от нуля наклоны отрицательны, но увеличиваются: например, $-4, -2, 0$ при $x = -2, -1, 0$. График на этом участке убывает и при этом загнут вверх.

$$f''(x) > 0 \Rightarrow \text{linksgekrümmt}$$

$$f''(x) < 0 \Rightarrow \text{rechtsgekrümmt}$$

Запись:

$$f \text{ ist linksgekrümmt für } x \in (a, b) \cup (c, d).$$

$$f \text{ ist rechtsgekrümmt für } x \in (e, g).$$

Несколько интервалов снова объединяем через $\cup$.

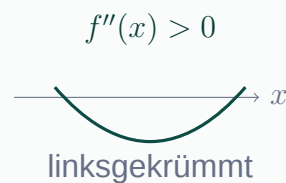
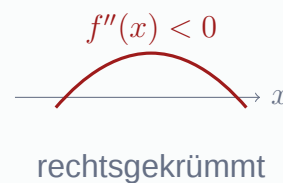
Частая ошибка.

Как и в Monotonie, нужен интервал, а не просто знак в одной точке.

Короткая таблица для Krümmung

Знак	$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$
Кривизна	linksgekrümmt	rechtsgekrümmt
На ЕРМ	интервал с $f'' > 0$	интервал с $f'' < 0$

$f'' > 0$ и $f'' < 0$



9 Точка перегиба и седловая точка

Когда проверка перегиба имеет смысл

Проверяем точку непрерывного графика; смена знака f'' через разрыв сама по себе перегиба не даёт. Тесты производных применяем там, где нужные производные существуют. В примерах с перегибом касательная существует.

Что такое Wendepunkt?

Wendepunkt — это точка, где график меняет кривизну: с linksgekrümmt на rechtsgekrümmt или наоборот. Важно: $f''(x_0) = 0$ даёт только кандидата. Кандидатом также может быть точка из D_f , где f'' не существует. Главное — реальная смена кривизны.

1. Найди $f''(x)$.
2. Реши $f''(x) = 0$ и отметь точки из D_f , где f'' не существует.
3. Проверь смену знака f'' .
4. Подставь найденный x_0 в $f(x)$.

$$W(x_0 | f(x_0)).$$

Частая ошибка.

$f''(x_0) = 0$ даёт только кандидата. Одного равенства недостаточно: нужна проверка смены кривизны. Точка должна принадлежать непрерывному графику.

ex $f''(x) = 0$, но Wendepunkt нет

$$f(x) = x^4, \quad f'(x) = 4x^3, \quad f''(x) = 12x^2, \quad f''(0) = 0.$$

Но f'' не меняет знак: слева и справа $f''(x) > 0$. Значит, Wendepunkt нет. При этом в 0 есть минимум: $x^4 \geq 0 = f(0)$.

Чем Sattelpunkt отличается от Wendepunkt?

Sattelpunkt — это Wendepunkt с горизонтальной касательной. То есть f'' меняет знак и одновременно $f'(x_0) = 0$.

Если $W(x_0|f(x_0))$ и дополнительно $f'(x_0) = 0$, то можно записать:

$$S(x_0|f(x_0)).$$

Частая ошибка.

Sattelpunkt не является Hochpunkt или Tiefpunkt. Он не максимум и не минимум, потому что монотонность не меняется как у Extrempunkt.

ex $f'(x) = 0$, но Extrempunkt нет

$$f(x) = x^3, \quad f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x, \quad f'(0) = 0.$$

Но f' не меняет знак: слева и справа $f'(x) > 0$. Значит, обычного Hochpunkt или Tiefpunkt нет. Поскольку $f''(x) = 6x$ меняет знак при 0, здесь действительно находится Sattelpunkt $S(0|0)$.

10 Касательная и нормаль

Как найти Tangente?

Tangente — это касательная к графику в точке x_0 . Её наклон равен $f'(x_0)$.

Формула:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Сначала считаем $f(x_0)$, потом $f'(x_0)$, затем подставляем в формулу. При горизонтальном перемещении $x - x_0$ высота прямой меняется на $f'(x_0)(x - x_0)$; к этому изменению прибавляем исходную высоту $f(x_0)$. Так формула одновременно задаёт нужный наклон и прохождение через точку графика.

Если в условии дана Tangente $y = kx + d$, то сразу можно записать:

$$f'(x_0) = k.$$

Угловым коэффициент связан с направленным углом наклона:

$$k = \tan(\alpha).$$

Здесь $\cos \alpha \neq 0$; вертикальная прямая конечного наклона не имеет. Если требуется острый угол β с осью x , то при $k \neq 0$ $\beta = \arctan |k|$. При $k = 0$ угол равен 0° , у вертикальной прямой он равен 90° ; эти углы не острые.

Как найти Normale?

Normale — это прямая, перпендикулярная касательной.

Если $f'(x_0) \neq 0$, то наклон нормали:

$$k_n = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

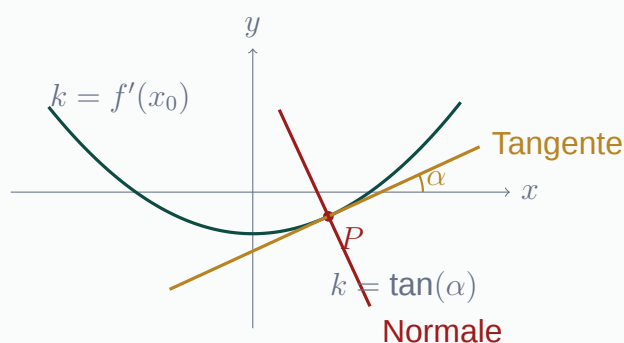
Если $f'(x_0) = 0$, нормаль вертикальная:

$$x = x_0.$$

Частая ошибка.

Формула $k_n = -1/f'(x_0)$ не работает при $f'(x_0) = 0$.

Касательная, нормаль и угол



11 Перевод условий ЕРМ

Фраза в задании $\Rightarrow$ математическая запись

В строках с экстремумом и перегибом ниже рассматриваем полиномы. Если свойство дано, используем необходимые равенства для системы; если его требуется доказать, выполняем проверку типа точки. Касание даёт общую точку и наклон; если требуется отсутствие пересечения, после вычисления проверяем знак разности функций.

Формулировка	Что сразу записать
$P(a b)$ auf Graph von f	$f(a) = b$
f berührt g bei $x = a$	$f(a) = g(a)$ и $f'(a) = g'(a)$
Graph berührt x -Achse bei $x = a$	$f(a) = 0$ и $f'(a) = 0$
Tangente hat Steigung k	$f'(a) = k$
Tangente parallel zu $y = kx + d$	$f'(a) = k$
Steigungswinkel ist α	$f'(a) = \tan(\alpha)$
symmetrisch zur y -Achse	$D_f = -D_f$, $f(-x) = f(x)$; bei Polynom: нечётные коэффициенты = 0
Extrempunkt bei $x = a$	$f'(a) = 0$ + Vorzeichenwechsel prüfen
Hochpunkt / Tiefpunkt bei $x = a$	$f'(a) = 0$ и знак f' меняется $+$ $\rightarrow$ $-$ или $-$ $\rightarrow$ $+$
Wendepunkt bei $x = a$	$f''(a) = 0$ + проверить смену знака f''
Sattelpunkt bei $x = a$	подтвердить точку перегиба и дополнительно проверить $f'(a) = 0$

12 Полный пример

Функция, область определения и асимптоты

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 16}.$$

Знаменатель не должен быть равен нулю:

$$x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x = \pm 4.$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}.$$

Область симметрична относительно 0, а $f(-x) = -f(x)$: числитель нечётный, знаменатель чётный. График симметричен относительно начала координат.

Нули функции:

$$\frac{x^3}{x^2 - 16} = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Так как $0 \in D_f$, получаем:

$$N(0|0).$$

Polstellen:

$$x = -4, \quad x = 4.$$

Деление многочленов начинается с $x^3/x^2 = x$. Вычитаем $x(x^2 - 16)$ из числителя и получаем остаток $16x$:

$$f(x) = x + \frac{16x}{x^2 - 16}.$$

Разность с прямой $y = x$ равна $16x/(x^2 - 16)$ и стремится к нулю, поскольку степень знаменателя больше. Значит, наклонная асимптота:

$$y = x.$$

Поведение около Polstellen:

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty.$$

Монотонность и точки экстремума

Найдем первую производную по правилу частного:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 16) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 16)^2} = \frac{x^4 - 48x^2}{(x^2 - 16)^2}.$$

Выносим x^2 , чтобы увидеть нули и знаки множителей:

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 48)}{(x^2 - 16)^2}.$$

Кандидаты:

$$x = -4\sqrt{3}, \quad x = 0, \quad x = 4\sqrt{3}.$$

Знаменатель квадратный, поэтому знак f' задаёт числитель $x^2(x^2 - 48)$. Кроме нуля, множитель x^2 положителен. Остаётся сравнить x^2 с 48: снаружи интервала $(-4\sqrt{3}, 4\sqrt{3})$ знак положителен, внутри отрицателен. В 0 производная обращается в нуль, но отрицательные знаки вокруг сохраняются. С учётом запрещённых точек -4 и 4 получаем:

$$f \text{ ist monoton steigend für } x \in (-\infty, -4\sqrt{3}) \cup (4\sqrt{3}, \infty).$$

$$f \text{ ist monoton fallend für } x \in (-4\sqrt{3}, -4) \cup (-4, 4) \cup (4, 4\sqrt{3}).$$

Таблица знаков для f' .

Интервал	Знак f'	Вывод
$(-\infty, -4\sqrt{3})$	+	steigt
$(-4\sqrt{3}, -4)$	−	fällt
$(-4, 4)$	−	fällt; $f'(0) = 0$ не меняет монотонность
$(4, 4\sqrt{3})$	−	fällt
$(4\sqrt{3}, \infty)$	+	steigt

Смена знака f' :

$$+ \rightarrow - \text{ при } x = -4\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad H(-4\sqrt{3} | -6\sqrt{3}).$$

$$- \rightarrow + \text{ при } x = 4\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad T(4\sqrt{3} | 6\sqrt{3}).$$

Частая ошибка.

Для высот найденных экстремумов подставляем $x^2 = 48$ в исходную функцию: $f(x) = x \cdot 48 / (48 - 16) = 3x/2$. Так получаются $\pm 6\sqrt{3}$. При $x = 0$ производная равна нулю, но знак f' не меняется. Значит, обычного Hochpunkt или Tiefpunkt там нет.

Кривизна, точка перегиба и итог

Для второй производной удобно записать первую как $(x^4 - 48x^2)(x^2 - 16)^{-2}$. Применяем правило произведения и цепочки:

$$f''(x) = \frac{4x^3 - 96x}{(x^2 - 16)^2} - \frac{4x(x^4 - 48x^2)}{(x^2 - 16)^3}.$$

Общий знаменатель $(x^2 - 16)^3$. В числителе после раскрытия скобок остаётся $32x^3 + 1536x = 32x(x^2 + 48)$:

$$f''(x) = \frac{32x(x^2 + 48)}{(x^2 - 16)^3}.$$

Множитель $x^2 + 48$ всегда положителен. Куб знаменателя сохраняет знак $x^2 - 16$, поэтому сравниваем знак x со знаком $x^2 - 16$. Например, на $(-4, 0)$ оба отрицательны, дробь положительна. Так получаем:

$$f \text{ ist linksgekrümmt für } x \in (-4, 0) \cup (4, \infty).$$

$$f \text{ ist rechtsgekrümmt für } x \in (-\infty, -4) \cup (0, 4).$$

Таблица знаков для f'' .

Интервал	Знак f''	Вывод
$(-\infty, -4)$	—	rechtsgekrümmt
$(-4, 0)$	+	linksgekrümmt
$(0, 4)$	—	rechtsgekrümmt
$(4, \infty)$	+	linksgekrümmt

Единственный кандидат на Wendepunkt:

$$x = 0.$$

Знак f'' меняется с $+$ на $-$, поэтому:

$$W(0|0).$$

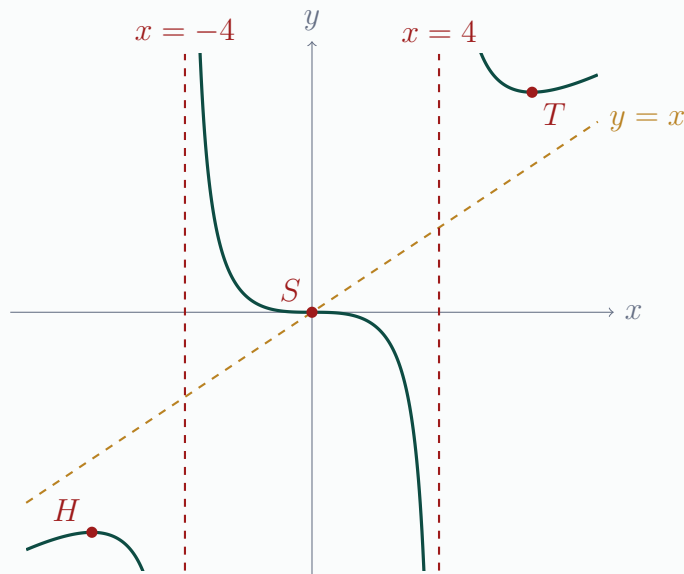
Так как $f'(0) = 0$, это Sattelpunkt:

$$S(0|0).$$

Итог:

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$;
- нуль функции: $x = 0$; точка на оси: $N(0|0)$;
- Polstellen: $x = -4$ и $x = 4$;
- schräge Asymptote: $y = x$;
- Hochpunkt: $H(-4\sqrt{3}|-6\sqrt{3})$;
- Tiefpunkt: $T(4\sqrt{3}|6\sqrt{3})$;
- Sattelpunkt: $S(0|0)$.

Итоговый эскиз графика



эскиз по функции; пересечение с $y = x$ в $S(0|0)$ здесь возможно

3 ошибки на этом примере

- $x = -4$ и $x = 4$ нельзя подставлять в $f(x)$: этих точек нет в D_f .
- $x = 0$ из $f'(x) = 0$ не даёт Extrempunkt, потому что знак f' не меняется.
- Координаты H , T , W и S считаются через исходную функцию $f(x)$, а не через $f'(x)$ или $f''(x)$.

Дополнительный пример

Рассмотрим тот же тип исследования для функции

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 4}.$$

Нужно было найти D_f , асимптоты, нули функции, точки экстремума и построить эскиз. Короткая проверка:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}, \quad x = -2, \quad x = 2, \quad y = 1.$$

Nullstellen нет, потому что $x^2 + 2 \neq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Единственный Extrempunkt:

$$H(0 | -\frac{1}{2}).$$

Проверка: $f'(x) = -12x/(x^2 - 4)^2$ меняет знак с + на - при 0. Вторая производная $f''(x) = 12(3x^2 + 4)/(x^2 - 4)^3$ не обращается в нуль; точки ± 2 исключены, поэтому перегибов нет.

13 Как записать ответ на экзамене

Готовые EPM-шаблоны

Что нужно записать	Шаблон ответа
Definitionsmenge	$D_f = \mathbb{R} \setminus \{a, b\}$
Monotonie	f ist monoton steigend/fallend für $x \in (a, b) \cup (c, d)$
Krümmung	f ist linksgekrümmt/rechtsgekrümmt für $x \in (a, b)$
Extrempunkt	внутренние кандидаты: $f'(x_0) = 0$ или нет $f'(x_0)$; проверить тип, записать $H/T(x_0 f(x_0))$; границы отдельно
Wendepunkt	$W(x_0 f(x_0))$ + проверить смену знака f''
Polstelle	вертикальная асимптота: $x = a$; проверить пределы слева и справа
Asymptote	горизонтальная: $y = c$; наклонная: $y = kx + d$
Tangente	$t : y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Главное правило оформления

Не оставляй ответ в виде промежуточного вычисления. На EPM нужен вывод: интервал, точка, асимптота или итоговая фраза.

14 Самопроверка

Для повторения правил производной используй *Mathe_gesamt_2026.pdf*, главу 5 с печатной с. 100 (PDF 101). Ещё одно цельное исследование: задание 10 на с. 113 (PDF 114), ответы на с. 114 (PDF 115).

В пунктах 2–4 ниже предполагается, что функция непрерывна в указанной внутренней точке, а используемые производные существуют по обе стороны. В пункте 2 также существует $f'(2)$.

Строки для EPM-решения

Не решай полностью. В каждом пункте запиши строку, которую можно поставить в решение.

- Дана $f(x) = \frac{1}{x-3}$. Запиши D_f и вертикальную асимптоту.
- В условии: **Hochpunkt bei** $x = 2$. Что нужно записать через f' и что проверить?
- Таблица знаков: $f' > 0$ на $(-\infty, 1)$ и $f' < 0$ на $(1, \infty)$. Какой это Extrempunkt?
- При $x = 0$ знак f'' меняется с $-$ на $+$. Какой вывод и как записать точку?
- Условие: Tangente bei $x = a$ ist parallel zu $y = 3x - 1$. Какое уравнение сразу записать?

A Antworten

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$; Polstelle и senkrechte Asymptote: $x = 3$.
2. $f'(2) = 0$ и проверка $f' : + \rightarrow -$.
3. Hochpunkt, потому что f' меняется $+ \rightarrow -$.
4. Кандидат на Wendepunkt подтверждён сменой знака f'' ; точка: $W(0|f(0))$.
5. $f'(a) = 3$.

✓ Цельное исследование: без готового алгоритма**Авторская тренировочная задача.**

Untersuchen Sie die Funktion

$$g(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}.$$

Bestimmen Sie die Definitionsmenge, die Achsenschnittpunkte und die Asymptoten. Untersuchen Sie das Monotonie- und Krümmungsverhalten und bestimmen Sie alle Extrem- und Wendepunkte. Fertigen Sie eine Skizze an.

Сначала составь собственный порядок исследования. До открытия ключа объясни по-немецки, почему смена кривизны около $x = 1$ не даёт Wendepunkt.

Ключ к цельному исследованию

A Antworten

Область: $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Нулей нет, поскольку $x^2 + 1 > 0$; пересечение с осью y : $(0 | -1)$.

$$g(x) = x + 1 + \frac{2}{x-1}, \quad g'(x) = 1 - \frac{2}{(x-1)^2}, \quad g''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

Асимптоты: $x = 1$ и $y = x + 1$; слева от 1 предел $-\infty$, справа $+\infty$.

Пусть $a = 1 - \sqrt{2}$, $b = 1 + \sqrt{2}$. Функция возрастает на $(-\infty, a)$ и (b, ∞) , убывает на $(a, 1)$ и $(1, b)$.

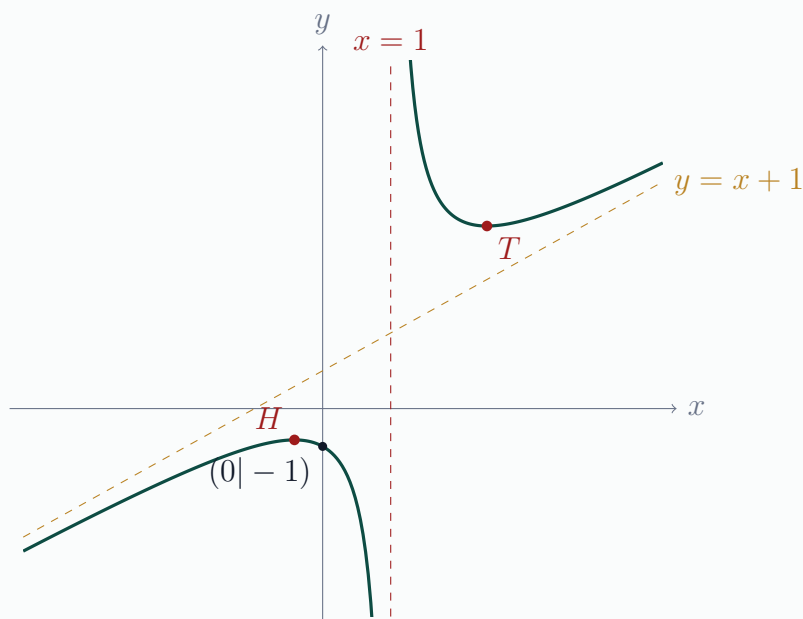
$$H(1 - \sqrt{2} | 2 - 2\sqrt{2}), \quad T(1 + \sqrt{2} | 2 + 2\sqrt{2}).$$

На $(-\infty, 1)$ имеем $g'' < 0$ (**rechtsgekrümmt**), на $(1, \infty)$ имеем $g'' > 0$ (**linksgekrümmt**). Перегибов нет: g'' не равна нулю, а $1 \notin D_g$.

Bei $x = 1$ liegt kein Wendepunkt vor, da die Funktion dort nicht definiert ist.

Эскиз: две ветви разделены вертикальной асимптотой. Левая лежит ниже $y = x + 1$, правая выше неё; отметь $(0 | -1)$, H и T . Наклонную асимптоту график не пересекает, потому что $2/(x-1) \neq 0$.

v Эскиз для сверки самостоятельной задачи



Ключи к остановкам

A Сначала сравни ход решения

1. $q(x) = x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$. Нули $-3, 1$; $q'(x) = 2x+2$. Убывание на $(-\infty, -1)$, возрастание на $(-1, \infty)$. $T(-1 | -4)$ — глобальный минимум, поскольку $(x+1)^2 \geq 0$.
2. $D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. На этой области $h(x) = x+1$, поэтому единственный нуль $x = -1$. Сокращение не возвращает исключённую точку $x = 1$; там устранимый разрыв.
3. Знаки p' : $+$ на $(-\infty, -1)$, $-$ на $(-1, 1)$, $+$ на $(1, \infty)$. Это соответственно возрастание, убывание, возрастание. Смена $+$ $\rightarrow$ $-$ даёт $H(-1 | 2)$, смена $-$ $\rightarrow$ $+$ даёт $T(1 | -2)$. Координаты высоты получены из p , а не из p' .

Переход к следующей теме

Попробуй задачу, в которой метод не указан в заголовке. Объясни, почему он подходит, и проверь результат по исходному условию. Связанные темы и порядок повторения найдёшь в навигаторе серии.

Материалы серии: demidmath.com t.me/demidmath

Словарь для повторения

М Мини-словарь: немецкие слова, которые встречаются постоянно

Немецкий термин	По-русски	Что делать
Definitionsmenge	область определения	значения x , при которых функция существует; сначала исключить запрещённые x
Nullstelle	нуль функции a	решить $f(x) = 0$; соответствующая точка на оси: $N(a 0)$
Polstelle	полюс, вертикальный разрыв	найти запрещённый x , где $f \rightarrow \pm\infty$
Asymptote	асимптота	записать прямую, к которой стремится график
Verhalten im Unendlichen	поведение на бесконечности	смотреть $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$
Ableitung	производная	найти $f'(x)$; она показывает наклон и изменение функции
Monotonie	промежутки роста и убывания	по знаку $f'(x)$ записать интервалы
Extremstelle	только координата x	найти кандидатов: $f'(x) = 0$ и точки из D_f , где f' нет
Extrempunkt	максимум или минимум	проверить смену знака f' , затем посчитать $y = f(x)$
Wendepunkt	точка перегиба	найти кандидатов и проверить реальную смену кривизны
Sattelpunkt	перегиб с горизонтальной касательной	проверить Wendepunkt и $f'(x_0) = 0$
hebbare Lücke	устранимый разрыв	сократить общий множитель; это не Polstelle
Tangente	касательная	использовать $k = f'(x_0)$ и точку $(x_0 f(x_0))$
Normale	нормаль	при $k \neq 0$ взять $k_n = -1/k$; при $k = 0$ нормаль вертикальна

Справка для повторения

→ **Главный маршрут**

f'

- 1. **Definitionsmenge** — где функция существует.
- 2. **Achsenschnittpunkte** — нули функции и точка $(0|f(0))$, если $0 \in D_f$.
- 3. **Symmetrie** — сначала проверить $D_f = -D_f$, затем тождество $f(-x) = f(x)$ или $f(-x) = -f(x)$.
- 4. **Polstellen** и **Asymptoten** — если есть дроби или разрывы.
- 5. **Verhalten im Unendlichen** — что происходит при $x \rightarrow \pm\infty$.
- 6. $f'(x)$ — первая производная.
- 7. **Monotonie** — интервалы, где функция растёт и убывает.
- 8. **Extrempunkte** — максимумы и минимумы.
- 9. $f''(x)$ — вторая производная.
- 10. **Krümmung** — куда изогнут график.
- 11. **Wendepunkte** и **Sattelpunkte**.
- 12. **Skizze** — итоговый рисунок.

Содержание

Нажми название или номер страницы. Закладки PDF повторяют разделы. Ответы открывай после собственной попытки.

Как формула показывает форму параболы . . .	1	11 Перевод условий EPM	13
1 Область определения (Definitionsmenge) . .	2	12 Полный пример	14
2 Нули функции (Nullstellen)	3	13 Как записать ответ на экзамене	18
3 Полюсы и асимптоты	3	14 Самопроверка	18
4 Поведение на бесконечности	5	Antworten	19
5 Производная	6	Ключ к цельному исследованию	20
6 Монотонность	7	Antworten	20
7 Точки экстремума	8	Ключи к остановкам	21
8 Вторая производная и кривизна	9	Сначала сравни ход решения	21
9 Точка перегиба и седловая точка	10	Словарь для повторения	22
10 Касательная и нормаль	12	Справка для повторения	23