

DEMID MATH EPM

Baumdiagramm

Вероятности через ветки дерева

Из группы учеников случайно выбирают одного. Известно, какая доля занимается спортом и какая доля спортсменов занимается ещё и музыкой. Как найти вероятность выбрать ученика, который занимается обоими?

Во второй доле речь идёт уже о меньшей группе. Дерево вероятностей помогает удерживать это различие: сначала выбирается одна ветка, затем от неё начинается следующий выбор. Разберём такой переход на числах, прежде чем записывать общее правило умножения.

Доля группы и доля внутри неё

Из 100 учеников одного выбирают с равными шансами. Спортсом занимаются 40; из этих 40 музыкой занимаются 12. Вероятность попасть в группу спортсменов равна $40/100$. Если уже известно, что выбран спортсмен, музыкантов среди возможных кандидатов 12 из 40, поэтому новая вероятность равна $12/40$. Перемножим доли: $(40/100) \cdot (12/40) = 12/100 = 0,12$.

Обозначим спорт событием A , музыку событием B . Событие — условие, которое для выбранного ученика либо выполнено, либо нет. Знак $\cap$ означает «и»: $A \cap B$ — ученик занимается и спортом, и музыкой. Запись $P(B \mid A)$ читается как вероятность B при условии, что произошло A . Для $P(A) > 0$ полученное рассуждение записывается так:

$$P(A \cap B) = P(A) P(B \mid A).$$

На дереве этому соответствует один путь: сначала ветка A , затем ветка B . Числа на второй ступени относятся к группе, в которую мы уже попали. Это правило пути — **Pfadregel**.

Запись $\bar{A}$ означает противоположное событие: ученик не занимается спортом. Музыкант может оказаться как спортсменом, так и не спортсменом. Эти два полных пути несовместны: один выбранный ученик не принадлежит обеим группам сразу. Поэтому для общей вероятности музыки складываем их вклады: $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$. Так работает **Summenregel**. На рисунке подписываем вероятности у веток, чтобы было видно, к какой группе относится каждое число.

Короткий перевод

und $\Rightarrow$ умножить вдоль одного пути,

oder $\Rightarrow$ сложить взаимоисключающие подходящие пути.

Для произвольных событий слово **oder** означает объединение $A \cup B$: подходит хотя бы одно из двух событий, в том числе оба сразу. При сложении $P(A) + P(B)$

общая часть учитывается дважды, поэтому один раз её вычитаем:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Простая сумма подходит, когда события несовместимы, то есть $A \cap B = \emptyset$.

Е Проверка дерева до вычислений

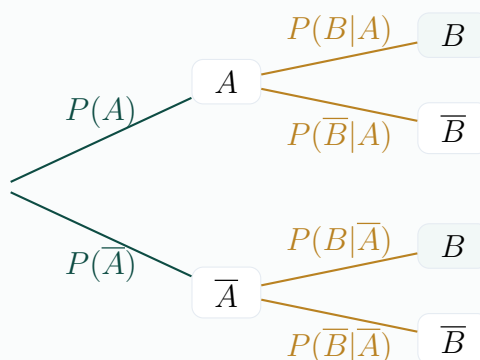
Из каждого узла должны выходить все возможные продолжения, и сумма вероятностей на этих ветках должна быть равна 1. Например,

$$P(B|A) + P(\bar{B}|A) = 1.$$

Если сумма не равна 1, дерево неполное или одна из подписей неверна.

Визуальная схема

v Две ступени



один путь: $P(A) \cdot P(B|A)$, все полные пути с B складываем.

! Что не делать

Нельзя складывать условные вероятности из разных групп:

$$P(B|A) + P(B|\bar{A})$$

обычно не даёт ответ на вопрос про $P(B)$.

Зависимые и независимые события

М Как понять по тексту

Формулировка	Что значит
mit Zurücklegen	вероятность на второй ступени обычно не меняется
ohne Zurücklegen	после первого выбора меняется количество объектов
unter der Bedingung	дана условная вероятность $P(B A)$
von diesen	вероятность внутри уже выбранной группы
mindestens ein	часто быстрее через противоположное событие

Точное определение независимости

События A и B независимы, если знание A не меняет вероятность B :

$$P(B|A) = P(B)$$

при $P(A) > 0$. Равносильная запись:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

На второй ступени сравниваем вероятность одного и того же события B в разных группах. Если в обеих группах она равна общей $P(B)$, первое событие не даёт информации о втором. Возвращение предмета сохраняет состав урны; независимость дополнительно предполагает новый случайный выбор без влияния предыдущего.

Независимость не означает, что события не могут произойти вместе. Напротив, два несовместных события с положительными вероятностями зависимы: если одно произошло, вероятность другого стала нулевой.

ex Мини-пример без возвращения

В урне 3 белых и 2 чёрных шара. Тянут два раза без возвращения.

$$P(\text{оба белые}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}.$$

После первого белого шара осталось четыре шара, из них два белых. Поэтому вторая дробь равна $2/4$. При возвращении и новом случайном выборе она осталась бы $3/5$, а вероятность двух белых была бы $9/25$.

Дерево или биномиальная модель?

М Как выбрать модель

Ситуация	Что брать
2–3 этапа с разными группами	дерево вероятностей
ohne Zurücklegen	дерево, потому что вероятность меняется
unter der Bedingung / von diesen	дерево или условная вероятность
n независимых испытаний, успех/неуспех и постоянное p	число успехов $X \sim B(n, p)$
mindestens, höchstens, genau	задают событие; сами по себе не определяют модель

! Типичная путаница

Если в условии стоит **ohne Zurücklegen**, не спешим писать $X \sim B(n, p)$. После первого выбора состав меняется, значит меняется и вероятность на следующем шаге.

Streaming: задача 6 из снимка

Дано:

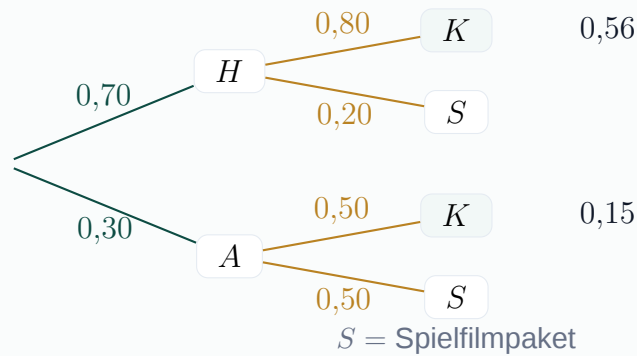
- 70% клиентов не старше 40 лет (**höchstens 40 Jahre**);
- из них 80% выбрали **Komplettpaket**;
- среди клиентов старше 40 лет (**älter als 40 Jahre**) 50% выбрали **Komplettpaket**.

Обозначим:

H = höchstens 40, A = älter als 40, K = Komplettpaket.

$P(H) = 0,70$, $P(A) = 0,30$, $P(K|H) = 0,80$, $P(K|A) = 0,50$.

Подписанное дерево



Решение и обратная вероятность

Вероятность полного пакета

Есть два подходящих пути:

$$H \cap K \quad \text{и} \quad A \cap K.$$

$$P(K) = 0,70 \cdot 0,80 + 0,30 \cdot 0,50 = 0,56 + 0,15 = 0,71.$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 71%.

Если спрашивают наоборот

Обратная вероятность: известно, что клиент выбрал **Komplettpaket**. Нужно найти вероятность, что ему не больше 40 лет:

$$P(H|K).$$

Теперь рассматриваем только клиентов с полным пакетом. Для наглядности представим 100 клиентов с указанными долями: 56 из них не старше 40 и выбрали полный пакет, ещё 15 старше 40 и тоже выбрали его. В новой группе 71 клиент, из них подходят 56. Тот же пересчёт доли через вероятности выглядит так:

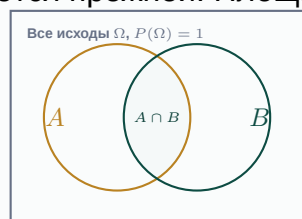
$$P(H|K) = \frac{P(H \cap K)}{P(K)} = \frac{0,56}{0,71} \approx 0,789.$$

Это формула Байеса (**Satz von Bayes**) для данного события; $P(K) = 0,71 > 0$.

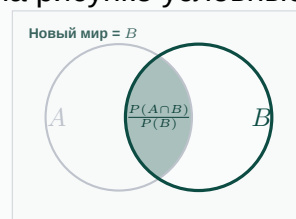
Unter den Kunden mit Komplettpaket sind etwa 78,9% höchstens 40 Jahre.

Разница между $P(A \cap B)$ и $P(A|B)$

Прямоугольник Ω обозначает все возможные исходы, круги — два события. При условной вероятности весь прямоугольник заменяется выбранным кругом; общая часть остаётся прежней. Площади на рисунке условные.



$P(A \cap B)$ — пересечение событий



$P(A|B)$ — доля A внутри круга B

- **Пересечение** $P(A \cap B)$: вероятность, что произойдут **оба** события одновременно (доля общей части во всем мире Ω).
- **Условная вероятность** $P(A|B)$: вероятность, что произойдет A , **если известно**, что B уже произошло (доля общей части только относительно размера круга B).

Как писать на экзамене

Строка решения	Что написать
Ereignisse definieren	$H = \dots, K = \dots$
Baum zeichnen	ветки подписать вероятностями
Pfadregel	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B A)$
Summenregel	подходящие ветки сложить
Antwortsatz	вероятность в Prozent

Типичные ошибки

Что проверить в решении

- ветки не подписаны вероятностями;
- при умножении вдоль пути взяли общую вероятность второго события вместо условной;
- при сложении путей дважды учли одни и те же исходы;
- условные вероятности сложили напрямую;
- в обратной вероятности забыли поделить на итоговое событие;
- при **ohne Zurücklegen** не изменили вторую вероятность.

Итоговая памятка

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A).$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B).$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0.$$

Самопроверка: сначала без ответа**Übungsaufgabe: zwei Maschinen**

Maschine A produziert 60% der Teile, Maschine B die übrigen 40%. Bei A sind 2%, bei B 5% der Teile defekt.

1. Zeichnen Sie ein beschriftetes Baumdiagramm. Wie wahrscheinlich ist ein defektes Teil?
2. Ein Teil ist defekt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt es von A?
3. Sind die Ereignisse «von A» und «defekt» unabhängig? Begründen Sie.
4. Zwei Teile werden unabhängig aus dieser Produktion ausgewählt. Wie wahrscheinlich ist mindestens ein defektes Teil?

Запиши события и вычисления. В ответе на второй вопрос объясни, среди каких деталей считается доля.

Ответы к самопроверке

Е Lösung

Mit D = defekt:

$$P(D) = 0,6 \cdot 0,02 + 0,4 \cdot 0,05 = 0,032 = 3,2\%.$$

$$P(A|D) = \frac{0,6 \cdot 0,02}{0,032} = 0,375 = 37,5\%.$$

Die Ereignisse sind abhängig, denn $P(D|A) = 0,02 \neq 0,032 = P(D)$. Bei zwei unabhängigen Teilen gilt:

$$P(\text{mindestens ein defektes Teil}) = 1 - (1 - 0,032)^2 = 0,062976 \approx 6,30\%.$$

Проверка дерева: вероятности конечных путей 0,012, 0,588, 0,020, 0,380 дают в сумме 1. В условной вероятности знаменатель 0,032 содержит все дефектные детали, независимо от машины.

Содержание

Нажми название или номер страницы. Закладки PDF повторяют разделы. Ответы открывай после собственной попытки.

Доля группы и доля внутри неё	1	Решение и обратная вероятность	5
Визуальная схема	2	Типичные ошибки	6
Зависимые и независимые события	3	Самопроверка: сначала без ответа	7
Дерево или биномиальная модель?	4	Ответы к самопроверке	8
Streaming: задача 6 из снимка	4		