

Umkehraufgaben

Как восстановить функцию из условий

Обычно формула функции известна, и мы подставляем в неё число. Здесь ситуация обратная: известны точки или свойства графика, а саму формулу ещё нужно восстановить. Например, условие сообщает, что парабола проходит через $(1|2)$, но её коэффициенты пока неизвестны.

Начнём с обычной подстановки. Она позволит записать одно равенство для коэффициентов. Следующее свойство даст ещё одно; постепенно описание графика превратится в систему уравнений. Такие задачи называются **Umkehraufgaben**.

Как свойства графика связывают коэффициенты

Для параболы запишем $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. Это общий вид функции, или **Ansatz**. Пока числа a, b, c неизвестны. Точка $(1|2)$ на графике означает $f(1) = 2$. Подставим:

$$a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 2, \quad a + b + c = 2.$$

Мы получили связь между коэффициентами. Одного равенства обычно недостаточно, чтобы найти все три, поэтому читаем следующее свойство графика. Если дан наклон k при $x = x_0$, добавляем $f'(x_0) = k$. Например, для этой параболы $f'(x) = 2ax + b$, поэтому наклон 0 при $x = 0$ даёт $b = 0$. Если ещё известно $f(0) = 1$, то $c = 1$ и из $a + b + c = 2$ получаем $a = 1$. Так восстановилась функция $f(x) = x^2 + 1$. Для полинома более высокой степени заданный перегиб даёт $f''(x_0) = 0$: вторая производная описывает изменение наклона.

Здесь x_0, y_0 обозначают координаты из условия, а a, b, c, d, e — искомые коэффициенты выбранного полинома. Его старший коэффициент должен быть ненулевым, иначе степень уменьшится. После решения системы подставим найденную функцию обратно в условия. Тип экстремума или перегиб подтверждаем достаточным признаком: нужной сменой знака или тестом производных. Само уравнение с нулевой производной ещё не доказывает тип точки.

В примере общий вид был известен: мы искали параболу. В других задачах степень и симметрию сообщает условие. Посмотрим, как по этим словам выбрать формулу с неизвестными коэффициентами.

1 Как выбрать вид функции (Ansatz)

Полином степени m содержит степени от x^m до постоянного члена. Симметрия позволяет заранее определить часть коэффициентов. Если $f(-x) = f(x)$, нечётные степени при подстановке меняют знак и могут сохранить равенство только с нулевыми коэффициентами. Если $f(-x) = -f(x)$, таким же образом исчезают чётные степени и постоянный член.

М Какой вид функции записать

Формулировка	Ansatz
Polynomfunktion 2. Grades	$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$
Polynomfunktion 3. Grades	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$
Polynomfunktion 4. Grades	$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, a \neq 0$
Parabel	$p(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$
Gerade	$g(x) = kx + d$
симметрия к оси y , степень 4	$ax^4 + bx^2 + c, a \neq 0$; остаются чётные степени
симметрия к началу координат, степень 3	$ax^3 + bx, a \neq 0$; остаются нечётные степени

Е Сколько нужно условий

При известных абсциссах условия на значения полинома и его производных дают линейную систему по коэффициентам. Единственное решение есть, если система совместна и число независимых уравнений равно числу неизвестных (полный ранг). Для $ax^3 + bx^2 + cx + d$ нужны четыре независимых уравнения; дополнительные равенства могут повторять информацию или противоречить ей.

Например, $f(1) = 2$ и $2f(1) = 4$ — одна связь, а $f(1) = 3$ с ней несовместно. Даже единственное решение нужно проверить: старший коэффициент не равен нулю, а экстремум, перегиб и прочие исходные свойства действительно выполнены. Если неизвестна абсцисса касания, система может быть нелинейной; правило подсчёта линейных уравнений к ней напрямую не применяется.

И Частая ошибка

Для полинома четвёртой степени: Если сказано **symmetrisch zur y -Achse**, не начинай с полного вида $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Сразу убери нечётные степени:

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c.$$

I 2 Условия переводятся в уравнения

M Фраза $\Rightarrow$ запись

Это необходимые равенства для составления системы. Если даны обе координаты экстремума, дополнительно записываем значение функции в этой точке. Касание даёт общую точку и наклон; при требовании не пересекать ось или график после решения проверяем знак функции или разности функций.

Фраза в условии	Что записать
$P(x_0 y_0)$ liegt auf Graph von f	$f(x_0) = y_0$
Nullstelle bei $x = x_0$	$f(x_0) = 0$
berührt die x -Achse bei $x = x_0$	$f(x_0) = 0, \quad f'(x_0) = 0$
Extrempunkt bei $x = x_0$	для системы: $f'(x_0) = 0$; затем проверить тип
Hochpunkt / Tiefpunkt bei $x = x_0$	$f'(x_0) = 0$; затем Vorzeichen или $f''(x_0) \neq 0$
Wendepunkt bei $x = x_0$	для системы: $f''(x_0) = 0$; затем проверить смену кривизны
Wendepunkt $W(x_0 y_0)$	$f(x_0) = y_0, \quad f''(x_0) = 0$; затем проверить тип
Tangente hat Steigung k	$f'(x_0) = k$
Tangente parallel zu $y = kx + d$	$f'(x_0) = k$
f berührt g bei $x = x_0$	$f(x_0) = g(x_0), \quad f'(x_0) = g'(x_0)$

E Прямая в общем виде

Если прямая дана как

$$Ax + By + C = 0,$$

сначала переведи её в вид $y = kx + d$:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}, \quad k = -\frac{A}{B}, \quad B \neq 0.$$

При $B = 0$ и $A \neq 0$ прямая вертикальна, и конечного наклона k у неё нет. При $A = B = 0$ это не уравнение прямой.

3 Пример 1: базовая схема

Тип задания: экстремум и параллельная касательная

Дано: многочлен третьей степени имеет точку экстремума $P(0|3)$. Касательная в точке $Q(2|1)$ параллельна прямой

$$g: 4x - y + 3 = 0.$$

Найти $f(x)$.

Общий вид функции (**Ansatz**):

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Условия:

$$f(0) = 3, \quad f'(0) = 0, \quad f(2) = 1.$$

Прямая:

$$4x - y + 3 = 0 \Rightarrow y = 4x + 3 \Rightarrow k = 4.$$

Значит:

$$f'(2) = 4.$$

Решение системы

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Из $f(0) = 3$ и $f'(0) = 0$:

$$d = 3, \quad c = 0.$$

Остаётся:

$$f(2) = 1 \Rightarrow 8a + 4b + 3 = 1,$$

$$f'(2) = 4 \Rightarrow 12a + 4b = 4.$$

То есть:

$$4a + 2b = -1, \quad 3a + b = 1.$$

Умножим второе уравнение на 2: $6a + 2b = 2$. Вычтем первое: член $2b$ исчезнет, и останется $2a = 3$. Найденное a подставим в $3a + b = 1$:

$$a = \frac{3}{2}, \quad b = -\frac{7}{2}.$$

Ответ:

$$f(x) = \frac{3}{2}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 3.$$

Е Проверка типа точки

Здесь $f'(0) = 0$ и $f''(0) = -7 < 0$, поэтому $P(0|3)$ действительно является точкой максимума, а не только стационарным кандидатом. Остальные два условия также выполняются: $f(2) = 1$ и $f'(2) = 4$.

4 Пример 2: EPM от 22.01.2026

Источник: предоставленный снимок с заголовком EPM 22.01.2026, задача 3.

Теперь высоты y_E и y_W заранее не даны. Нельзя заменять их нулями. Но точка W лежит на известной касательной, поэтому её высоту можно вычислить по уравнению прямой. Так одно геометрическое описание даёт недостающее числовое условие.

Экстремум, перегиб и касание

Формулировка: многочлен третьей степени имеет точку экстремума $E(0|y_E)$ и в точке перегиба $W(0,5|y_W)$ касается прямой

$$g: \frac{3}{2}x + y - \frac{1}{4} = 0.$$

Общий вид функции (**Ansatz**):

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Сначала переводим прямую:

$$g(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}, \quad g'(x) = -\frac{3}{2}.$$

Условия:

$$f'(0) = 0, \quad f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}, \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}.$$

Коэффициенты

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad f''(x) = 6ax + 2b.$$

Из первых двух условий:

$$c = 0, \quad 3a + 2b = 0 \Rightarrow b = -\frac{3}{2}a.$$

Из $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$:

$$\frac{3}{4}a + b = -\frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3}{4}a = -\frac{3}{2} \Rightarrow a = 2, \quad b = -3.$$

Из $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + d = -\frac{1}{2} \Rightarrow d = 0.$$

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2.$$

Е Проверка исходных слов

$f'(0) = 0$ и $f''(0) = -6 < 0$, значит при $x = 0$ действительно точка максимума. Кроме того, $f''(\frac{1}{2}) = 0$ и $f'''(x) = 12 \neq 0$, поэтому $x = \frac{1}{2}$ — абсцисса точки перегиба. Равенства $f(\frac{1}{2}) = g(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$ и $f'(\frac{1}{2}) = g'(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$ подтверждают, что g — касательная. При этом $f(x) - g(x) = 2(x - \frac{1}{2})^3$ меняет знак: касательная в перегибе пересекает график, что не противоречит её касательности.

5 Пример 3: ЕРМ от 18.02.2026

Симметрия, нуль функции и параллельная касательная

Формулировка: функция четвёртой степени симметрична относительно оси y и имеет нуль при $x = 3$. Касательная в точке $P(1|4)$ параллельна прямой

$$g : 3x - y = 0.$$

Из симметрии:

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c.$$

Условия:

$$f(3) = 0, \quad f(1) = 4.$$

Прямая:

$$3x - y = 0 \Rightarrow y = 3x \Rightarrow k = 3.$$

Значит:

$$f'(1) = 3.$$

Решение системы

$$f'(x) = 4ax^3 + 2bx.$$

Получаем систему:

$$81a + 9b + c = 0,$$

$$a + b + c = 4,$$

$$4a + 2b = 3.$$

Из $4a + 2b = 3$:

$$b = \frac{3}{2} - 2a.$$

Из $a + b + c = 4$:

$$c = \frac{5}{2} + a.$$

Подставляем в первое уравнение:

$$81a + 9\left(\frac{3}{2} - 2a\right) + \frac{5}{2} + a = 0 \Rightarrow 64a + 16 = 0.$$

$$a = -\frac{1}{4}, \quad b = 2, \quad c = \frac{9}{4}.$$

Ответ:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + \frac{9}{4}.$$

6 Пример 4: EPM от 16.03.2026

Минимум, перегиб и угол наклона

Формулировка: многочлен третьей степени имеет точку минимума $T(0|0)$ и точку перегиба

$$W\left(-\frac{1}{2} \middle| \frac{5}{4}\right).$$

После этого нужно найти острый угол касательной с осью x .

Общий вид функции (**Ansatz**):

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Точка минимума $T(0|0)$ даёт:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0.$$

Точка перегиба даёт:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}, \quad f''\left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Решение и угол

Из $f(0) = 0$ и $f'(0) = 0$:

$$d = 0, \quad c = 0.$$

Значит:

$$f(x) = ax^3 + bx^2.$$

Вторая производная:

$$f''(x) = 6ax + 2b.$$

Из $f''(-\frac{1}{2}) = 0$:

$$-3a + 2b = 0 \Rightarrow b = \frac{3}{2}a.$$

Из $f(-\frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$:

$$-\frac{1}{8}a + \frac{1}{4}b = \frac{5}{4}.$$

Подставляем $b = \frac{3}{2}a$:

$$\frac{1}{4}a = \frac{5}{4} \Rightarrow a = 5, \quad b = \frac{15}{2}.$$

$$f(x) = 5x^3 + \frac{15}{2}x^2.$$

Для касательной в точке перегиба:

$$k = f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{4}.$$

Отрицательный наклон означает, что прямая опускается вправо. Для острого угла между прямой и осью нужно отношение длин, поэтому берём $|k| = 15/4$. Обратная функция $\arctan$ восстанавливает угол по его тангенсу; для ответа в градусах выбираем режим DEG:

$$\beta = \arctan\left(\frac{15}{4}\right) \approx 75,1^\circ.$$

Е Проверка минимума и перегиба

$f''(0) = 15 > 0$, поэтому $T(0|0)$ действительно точка минимума. Так как $f'''(x) = 30 \neq 0$, точка при $x = -\frac{1}{2}$ действительно является точкой перегиба.

7 Что делать после функции

М Если задание продолжается

Что спрашивают дальше	Что делать
Нули функции	решить $f(x) = 0$
Точки экстремума	решить $f'(x) = 0$, проверить смену знака, найти $y = f(x)$
Точки перегиба	решить $f''(x) = 0$, проверить смену знака, найти $y = f(x)$
Касательная в точке перегиба	найти x_W , $f(x_W)$, $f'(x_W)$ и записать касательную
Эскиз	отметить нули функции, точки экстремума, точки перегиба и поведение графика
Площадь / интеграл	сначала найти границы по точкам пересечения

Е Связь с исследованием функции

В разобранных задачах после восстановления $f(x)$ требуется исследовать её свойства. То есть обратная задача — это вход в исследование функции.

8 Типичные ошибки

! Что проверить в решении

- выбран слишком общий вид функции, хотя дана симметрия;
- записали $E(0|y_E)$ как отдельное численное условие, хотя y_E неизвестно;
- при **berührt** записали только $f(x_0) = g(x_0)$ и забыли $f'(x_0) = g'(x_0)$;
- не перевели прямую $Ax + By + C = 0$ в вид $y = kx + d$;
- нашли коэффициенты, но не проверили функцию в исходных условиях;
- после нахождения x не нашли координату y через исходную функцию.

Е Быстрая проверка

Перед тем как идти дальше, подставь найденную функцию в каждое условие из текста. Если условие не выполняется, проверь перевод и вычисления. Возможна и несовместность исходных данных; её нужно обосновать.

9 Самопроверка

✓ Переведи в систему, не решая полностью

Записывай общий вид функции (Ansatz), если указана степень, и необходимые условия (Bedingungen). Здесь даны неполные наборы: единственная функция не всегда определяется. Полностью решать систему не нужно. В пунктах 3, 4 и 6 считай f полиномом.

1. Polynomfunktion 3. Grades geht durch $P(0|2)$ und hat bei $x = 1$ einen Extrempunkt.
2. Eine Parabel ist symmetrisch zur y -Achse und geht durch $P(2|5)$.
3. Tangente an f bei $x = 3$ ist parallel zu $g : 2x - y + 1 = 0$.
4. f berührt g bei $x = 1$.
5. Polynomfunktion 3. Grades hat Wendepunkt $W(2|-1)$.
6. Graph berührt die x -Achse im Ursprung.
7. Polynomfunktion 4. Grades ist symmetrisch zur y -Achse und hat den Tiefpunkt $T(0|-2)$.

A Antworten

1. Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$; $f(0) = 2$, $f'(1) = 0$. Двух равенств недостаточно для единственности. У кубического полинома экстремум в 1 дополнительно требует $f''(1) = 6a + 2b \neq 0$.
2. Ansatz: $p(x) = ax^2 + c$, $a \neq 0$; $p(2) = 5$, то есть $4a + c = 5$. Остаётся один свободный коэффициент.
3. $g : y = 2x + 1$, also $k = 2$; Bedingung: $f'(3) = 2$.
4. $f(1) = g(1)$ und $f'(1) = g'(1)$.
5. Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$; $f(2) = -1$, $f''(2) = 0$. Перегиб подтверждается $f''' = 6a \neq 0$; единственности пока нет.
6. $f(0) = 0$ und $f'(0) = 0$; для касания без пересечения затем проверить отсутствие смены знака f .
7. Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, $a \neq 0$; $c = -2$. Равенство $f'(0) = 0$ выполняется автоматически и не добавляет независимого условия. Минимум в 0 требует $b > 0$ либо $b = 0$ и $a > 0$.

☒ **Самостоятельно: восстановление и касательная****Авторская тренировочная задача.**

Eine Polynomfunktion dritten Grades besitzt den Tiefpunkt $T(0 | -1)$ und den Wendepunkt $W(1 | 1)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung und die Gleichung der Wendetangente. Überprüfen Sie die angegebenen Punkteigenschaften.

Начни с Ansatz и собственного перевода условия. После решения проверь степень, тип экстремума и перегиб; одного совпадения координат недостаточно.

А Ключ: восстановление кубического полинома

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a \neq 0.$$

Условия: $f(0) = -1$, $f'(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f''(1) = 0$. Они дают $d = -1$, $c = 0$, $a + b = 2$, $6a + 2b = 0$. Отсюда $a = -1$, $b = 3$:

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 1, \quad f'(x) = -3x^2 + 6x, \quad f''(x) = -6x + 6.$$

$f''(0) = 6 > 0$ подтверждает минимум, а $f''(1) = 0$ и $f''' = -6 \neq 0$ — перегиб. Старший коэффициент ненулевой. Наклон в W : $f'(1) = 3$.

$$t: y = 1 + 3(x - 1) = 3x - 2.$$

Die Wendetangente hat die Steigung 3 und verläuft durch $W(1|1)$. Проверка: у прямой и функции при $x = 1$ одинаковые значение и производная.

Переход к следующей теме

Попробуй задачу, в которой метод не указан в заголовке. Объясни, почему он подходит, и проверь результат по исходному условию. Связанные темы и порядок повторения найдёшь в навигаторе серии.

Материалы серии: demidmath.com t.me/demidmath

Справка для повторения

➔

Мини-алгоритм на ЕРМ

- 1

Запиши общий вид функции с коэффициентами.
- 2

Выпиши каждое условие отдельной строкой.
- 3

Преврати условия в уравнения для коэффициентов.
- 4

Реши систему и получи $f(x)$.
- 5

Подставь функцию обратно в условия: точка, наклон, перегиб.

Содержание

Нажми название или номер страницы. Закладки PDF повторяют разделы. Ответы открывай после собственной попытки.

Как свойства графика связывают коэффициенты	1	6	Пример 4: ЕРМ от 16.03.2026	7
1 Как выбрать вид функции (Ansatz)	2	7	Что делать после функции	8
2 Условия переводятся в уравнения	3	8	Типичные ошибки	9
3 Пример 1: базовая схема	4	9	Самопроверка	9
4 Пример 2: ЕРМ от 22.01.2026	5	Antworten		10
5 Пример 3: ЕРМ от 18.02.2026	6	Ключ: восстановление кубического полинома		12
		Справка для повторения		13