

Trigonometrie

Треугольники, углы и площади на EPM

В прямоугольном треугольнике известны гипотенуза 10 и острый угол 30° . Нужно найти катет напротив этого угла. Одной теоремы Пифагора пока недостаточно: второй катет тоже неизвестен. Зато у нас есть угол, который определяет соотношение сторон.

Эти соотношения называют синусом, косинусом и тангенсом. Чтобы выбрать нужное, сначала посмотрим, какие стороны участвуют в нашей задаче и как они расположены относительно выбранного угла.

1 Стороны относительно выбранного угла

Выберем острый угол α . Сторона напротив прямого угла называется гипотенузой (**Hypotenuse**); катет напротив α — противолежащим (**Gegenkathete**), второй катет — прилежащим (**Ankathete**). Все прямоугольные треугольники с одним и тем же острым углом подобны: при увеличении фигуры все стороны меняются в одинаковое число раз. Поэтому отношения сторон зависят от угла, а не от размера треугольника. Синус связывает противолежащий катет с гипотенузой, поэтому для нашего примера

$$\sin 30^\circ = \frac{b}{10}, \quad b = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5.$$

Мы выбрали синус потому, что в задаче участвуют именно эти две стороны. Косинус связывает с гипотенузой прилежащий катет, а тангенс связывает катеты:

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}.$$

При переходе к другому острому углу катеты меняются ролями; гипотенуза остаётся той же. Эти отношения сторон относятся к прямоугольному треугольнику. Для произвольного треугольника дальше понадобятся теоремы синусов и косинусов. В более сложной фигуре сначала ищем или строим треугольник, к которому можно применить нужное соотношение.

Калькулятор

Для углов в градусах используйте режим **DEG**; для радиан — **RAD**. Например, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ помогает проверить режим. Точные значения и соотношение $180^\circ = \pi$ рад полезны и при работе с калькулятором.

М Как выбрать формулу

Что дано

Что записать

Ankathete и угол, нужна Gegenkathete

$$\text{Gegenkathete} = \text{Ankathete} \cdot \tan \alpha$$

Hypotenuse и угол, нужна Gegenkathete

$$\text{Gegenkathete} = \text{Hypotenuse} \cdot \sin \alpha$$

Hypotenuse и угол, нужна Ankathete

$$\text{Ankathete} = \text{Hypotenuse} \cdot \cos \alpha$$

две стороны, нужен угол

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}\right) \text{ или через arcsin / arccos}$$

ex Башня и угол подъёма

Горизонтальное расстояние до основания башни равно 250 м. Угол подъёма к вершине: 32° . Найти высоту башни.

$$\tan(32^\circ) = \frac{h}{250} \quad \Rightarrow \quad h = 250 \cdot \tan(32^\circ) \approx 156,2 \text{ м.}$$

Если в задаче дана высота глаз наблюдателя, её нужно добавить к найденной высоте над уровнем глаз. Это предполагает вертикальную башню и известное взаимное положение уровня глаз и основания; наклонное расстояние до вершины нельзя подставлять вместо 250.

Лестница длиной 5 м образует с горизонтальной землёй угол 60° . Её длина — гипотенуза, а высота верхнего конца — противолежащий катет:

$$\text{лестница } 5 \text{ м, } \alpha = 60^\circ \quad \Rightarrow \quad h = 5 \sin(60^\circ).$$

$$\text{Gegenkathete } 12, \text{ Ankathete } 20 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan\left(\frac{12}{20}\right).$$

Во второй записи известны оба катета. Сначала получаем $\tan \alpha = 12/20$, затем обратная функция $\arctan$ возвращает сам угол: примерно $30,96^\circ$.

E Сумма углов

В прямоугольном треугольнике:

$$90^\circ + \alpha + \beta = 180^\circ, \quad \alpha + \beta = 90^\circ.$$

Если известен один острый угол, второй сразу равен $90^\circ - \alpha$.

2 Теорема синусов (Sinussatz)

Когда треугольник существует

Длины сторон положительны, каждый угол лежит между 0° и 180° , сумма углов равна 180° . Для трёх сторон нужна строгая проверка: сумма двух меньших длин больше наибольшей. Равенство даёт вырожденную фигуру.

Когда нужна теорема синусов

Sinussatz связывает стороны и противоположные углы:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Буквой a обозначена сторона напротив угла α , буквой b — сторона напротив β , буквой c — сторона напротив γ . Используем теорему синусов, если известна пара:

сторона + противоположный угол.

Чтобы найти следующую величину, нужна также ещё одна сторона или ещё один угол. Например, пусть $a = 6$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$. Тогда

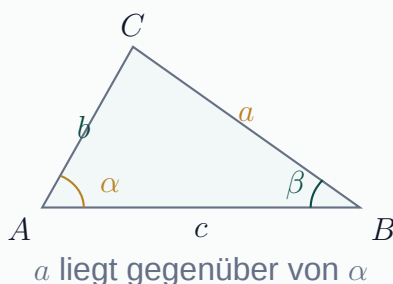
$$\frac{6}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ}, \quad b = \frac{6 \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = 6\sqrt{2}.$$

Третий угол равен $180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$.

Например:

$$\frac{AB}{\sin(\angle C)} = \frac{BC}{\sin(\angle A)}.$$

Сторона напротив угла



Е Если теорема синусов даёт два угла

При $0 < s < 1$ из $\sin(\alpha) = s$ получаются два кандидата:

$$\alpha_1 = \arcsin(s), \quad \alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1.$$

При $s = 1$ кандидат один: 90° ; при $s \leq 0$ или $s > 1$ внутреннего угла невырожденного треугольника нет. Сначала отбрасываем ветви, при которых третий угол не положителен. Если обе ветви допустимы, схема или дополнительное геометрическое условие может выбрать одну из них. Если такого условия нет, в математически корректном ответе сохраняем обе конфигурации.

3 Теорема косинусов (Kosinussatz)**Когда нужна теорема косинусов**

Kosinussatz нужен, когда известны две стороны и угол между ними, а нужно найти третью сторону.

Формула:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma).$$

Здесь γ — угол между сторонами a и b . Чтобы понять формулу, расположим одну сторону вдоль оси x . Тогда концы двух сторон из общей вершины имеют координаты $(a|0)$ и $(b \cos \gamma | b \sin \gamma)$. Квадрат расстояния между ними равен

$$c^2 = (a - b \cos \gamma)^2 + (b \sin \gamma)^2 = a^2 - 2ab \cos \gamma + b^2.$$

Здесь использовано $\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma = 1$. При тупом угле проекция $b \cos \gamma$ отрицательна, и тот же расчёт остаётся верным.

Если известны a , b и угол γ между ними, записываем:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)}.$$

ex Угол по трём сторонам

Если известны a, b, c и выполнено неравенство треугольника, то

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \quad \gamma = \arccos \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Например, для $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ получаем $\cos \gamma = 0$, $\gamma = 90^\circ$. Так можно найти и тупой угол: $\arccos$ учитывает знак косинуса.

4 Площадь (Flächeninhalt)

Площадь через две стороны и угол

Если известны две стороны треугольника и угол между ними, площадь:

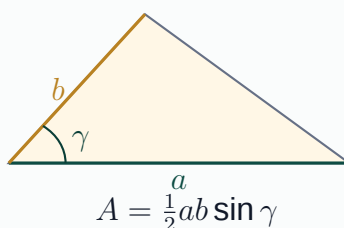
$$A = \frac{1}{2}ab \sin(\gamma).$$

Опустим высоту на сторону a . В образовавшемся прямоугольном треугольнике $h = b \sin \gamma$, поэтому $A = ah/2 = ab \sin \gamma/2$. При тупом γ основание высоты лежит на продолжении стороны; формула сохраняется, поскольку $\sin(180^\circ - \gamma) = \sin \gamma$.

Например:

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AC \cdot \sin(\angle BCA).$$

☒ Площадь без высоты



5 Четырёхугольник как два треугольника

Если дан выпуклый четырёхугольник, диагональ лежит внутри и разбивает его на два треугольника. Тогда площади складываются:

$$A_{ABCD} = A_{\triangle ABC} + A_{\triangle ACD}.$$

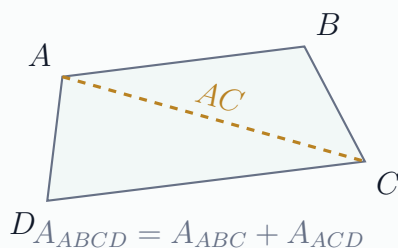
Для вогнутого четырёхугольника сначала проверяем схему: одна диагональ лежит внутри, а другая может давать представление как разность площадей. Нельзя механически складывать два треугольника, не убедившись, какую область они покрывают. Диагональ обычно нужна как вспомогательная сторона. Но она не входит в периметр:

$$U = AB + BC + CD + DA.$$

В решении удобно явно написать:

AC ist eine Diagonale und wird beim Umfang nicht addiert.

Разбиение диагональю



6 Разбор задачи EPM от 16.03.2026

Участок в форме четырёхугольника

Дан участок в форме четырёхугольника $ABCD$:

$$AB = 217 \text{ m}, \quad BC = 230 \text{ m}, \quad DA = 87 \text{ m}.$$

$$\angle BCA = 50^\circ, \quad \angle CAD = 35^\circ.$$

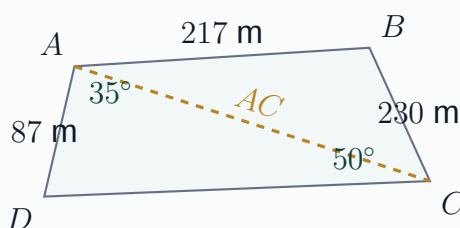
Нужно найти площадь и периметр.

Для нарисованной выпуклой конфигурации проводим внутреннюю диагональ AC . Тогда:

$$A_{ABCD} = A_{\triangle ABC} + A_{\triangle ACD}.$$

Сначала найдём AC в треугольнике ABC .

Принятая выпуклая конфигурация; схема не в масштабе



Что не задано в исходном фото

В исходном условии нет рисунка и нет дополнительного требования, которое однозначно выбирает форму четырёхугольника. Набор “две стороны и угол не между ними” (SSA) может задавать два треугольника. Поэтому нарисованная выше схема — возможная конфигурация, но не следствие одних только чисел.

7 Пример: диагональ AC

Теорема синусов в $\triangle ABC$

В $\triangle ABC$ известны:

$$AB = 217, \quad BC = 230, \quad \angle C = 50^\circ.$$

Сначала найдём угол A .

По теореме синусов:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}.$$

$$\sin A = \frac{BC \cdot \sin C}{AB} = \frac{230 \cdot \sin(50^\circ)}{217} \approx 0,81194.$$

$$A \approx 54,3^\circ.$$

Далее используем сохранённый угол $A_1 = \arcsin(230 \sin 50^\circ / 217)$. Тогда:

$$B_1 = 180^\circ - 50^\circ - A_1 \approx 75,7^\circ.$$

Теперь:

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}.$$

$$AC = \frac{217 \cdot \sin B_1}{\sin(50^\circ)} \approx 274,5 \text{ m}.$$

В дальнейших вычислениях используем неокруглённое $AC \approx 274,51398 \text{ m}$.

Почему нужна схема

Поскольку $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$, здесь получаются

$$A_1 \approx 54,3^\circ \quad \text{и} \quad A_2 \approx 125,7^\circ.$$

Для нарисованной выше конфигурации используется первая ветвь:

$$AC \approx 274,5 \text{ m}.$$

Вторая ветвь даёт $B_2 \approx 4,3^\circ$ и $AC \approx 21,2 \text{ m}$. Без исходной схемы или дополнительного условия обе ветви нужно сохранить.

8 Пример: площадь

Площадь $\triangle ABC$

Используем две стороны BC , AC и угол между ними $\angle BCA = 50^\circ$:

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AC \cdot \sin(50^\circ).$$

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 230 \cdot AC \cdot \sin(50^\circ) \approx 24183,3 \text{ m}^2.$$

Площадь $\triangle ACD$

В $\triangle ACD$ известны:

$$AC \approx 274,5, \quad AD = 87, \quad \angle CAD = 35^\circ.$$

$$A_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AD \cdot \sin(35^\circ).$$

$$A_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot 87 \cdot \sin(35^\circ) \approx 6849,3 \text{ m}^2.$$

9 Пример: периметр

Сначала найти CD

Для периметра нужна внешняя сторона CD . Она лежит в $\triangle ACD$.

Используем теорему косинусов:

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2 \cdot AC \cdot AD \cdot \cos(35^\circ).$$

$$CD^2 = AC^2 + 87^2 - 2 \cdot AC \cdot 87 \cdot \cos(35^\circ).$$

$$CD \approx 209,3 \text{ m}.$$

Теперь:

$$U = AB + BC + CD + DA.$$

$$U = 217 + 230 + CD + 87 \approx 743,3 \text{ m}.$$

! Не прибавляй диагональ

AC

не входит в периметр, потому что это внутренняя диагональ. Она нужна для вычислений, но не является внешней границей участка.

10 Пример: итог

Складываем площади:

$$A_{ABCD} = A_{\triangle ABC} + A_{\triangle ACD}.$$

$$A_{ABCD} \approx 24183,3 + 6849,3 = 31\,032,6 \text{ m}^2.$$

Для показанной схемы с длинной диагональю итоговый ответ:

$$A \approx 31\,032,6 \text{ m}^2$$

$$U \approx 743,3 \text{ m}$$

Е Что ещё допускает текст без схемы

Если оставить первую ветвь теоремы синусов, но расположить B и D по одну сторону от AC , получается простой вогнутый четырёхугольник. Его площадь — разность:

$$A_{ABCD} = A_{ABC} - A_{ACD} \approx 17\,334,1 \text{ m}^2, \quad U \approx 743,3 \text{ m}.$$

Для второй ветви теоремы синусов и расположения B, D по разные стороны от AC :

$$AC \approx 21,2 \text{ m}, \quad CD \approx 70,7 \text{ m},$$

$$A_{ABCD} \approx 2\,393,0 \text{ m}^2, \quad U \approx 604,7 \text{ m}.$$

Эта конфигурация также вогнута. Четвёртая комбинация самопересекается и не задаёт обычный участок. Следовательно, по одному только тексту исходного фото задача не имеет единственного численного ответа. Условие **convex** выбирает первую, подробно разобранный конфигурацию; данная на экзамене схема также может однозначно зафиксировать выбор.

11 3 ошибки на этой теме

1. Использовать неправильный угол

В формуле

$$A = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$

угол γ должен быть между сторонами a и b .

2. Сложить лишнюю диагональ

Для четырёхугольника:

$$U = AB + BC + CD + DA.$$

Диагональ AC не входит в периметр.

3. Забыть единицы

Площадь:

$$\text{m}^2.$$

Периметр:

$$\text{m}.$$

Периметр измеряет длину границы, а площадь — размер покрытой поверхности, поэтому единицы у них разные.

I 12 Три инструмента

Дано $\Rightarrow$ формула

Что вижу в задаче	Что делаю
известная пара «сторона и угол напротив» и ещё сторона или угол	беру Sinussatz
три стороны, нужен угол	беру Kosinussatz в обратную сторону
две стороны и угол между ними	беру Kosinussatz для третьей стороны
две стороны и угол между ними, нужна площадь	беру $A = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$
прямой угол	использую теорему Пифагора или $\sin, \cos, \tan$
четырёхугольник	делю диагональю на два треугольника

Мини-алгоритм

- 1 Строим схему и подписываем все данные.
- 2 Разделяем четырёхугольник диагональю, если фигура не является треугольником.
- 3 Для каждого треугольника выбираем одну формулу по данным.
- 4 Сначала находим недостающие стороны и углы, затем площадь и периметр.
- 5 В периметр включаем только внешние стороны, но не диагональ.

Главная ошибка

Ученик видит угол и сразу выбирает теорему синусов. Но если известны две стороны и угол между ними, для третьей стороны нужна теорема косинусов, а для площади — формула $A = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$. Диагональ помогает считать, но не входит в периметр.

13 Мини-словарь

М Формулировка EPM $\Rightarrow$ что делать

Фраза EPM	Что сразу записать
Dreieck	треугольник, сумма углов 180°
Viereck	четырёхугольник, часто делим на два треугольника
Seite	сторона, длина в m
Winkel	угол, обычно измеряется в градусах
gegenüberliegende Seite	сторона напротив угла
eingeschlossener Winkel	угол между двумя известными сторонами
Flächeninhalt	площадь, ответ в m^2
Umfang	периметр, ответ в m
Diagonale	отрезок между несоседними вершинами; у выпуклого четырёхугольника лежит внутри

Е Как думать

В тригонометрии формула выбирается не по теме, а по данным: какие стороны и какие углы уже известны.

14 Как записать ответ на экзамене

М Готовые EPM-шаблоны

Ситуация	Запись
Теорема синусов	$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$
Теорема косинусов	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$
Площадь треугольника	$A = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$
Сумма углов	$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
Площадь четырёхугольника	bei innerer Diagonale: $A_{ABCD} = A_{\triangle ABC} + A_{\triangle ACD}$
Периметр четырёхугольника	$U = AB + BC + CD + DA$
Готовая фраза ответа	Der Flächeninhalt beträgt ... m^2. Der Umfang beträgt ... m.
Единицы	A in m^2 , U in m

E Экзаменационная логика

Проверяющий должен видеть, почему ты выбрал формулу. Минимальная хорошая запись:

Da AC eine innere Diagonale ist, gilt $A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ACD}$.

15 Самостоятельные вычисления

E Übungsaufgaben

1. Ein Dreieck hat die Seiten $a = 5$ cm, $b = 6$ cm und $c = 7$ cm. Berechnen Sie den Winkel γ gegenüber c , den Flächeninhalt und den Umfang.
2. Gegeben sind $a = 5$ cm, $b = 8$ cm und $\alpha = 30^\circ$ gegenüber a . Bestimmen Sie alle möglichen Dreiecke: die Winkel β, γ und die Seite c .

Во втором задании не выбирай единственный угол только потому, что его выдал $\arcsin$.

Ответы к самостоятельным вычислениям

Е Lösungen

1. Die Dreiecksungleichung gilt, denn $5 + 6 > 7$.

$$\cos \gamma = \frac{25 + 36 - 49}{60} = \frac{1}{5}, \quad \gamma \approx 78,46^\circ.$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \sin \gamma = 6\sqrt{6} \approx 14,70 \text{ cm}^2, \quad U = 18 \text{ cm}.$$

2. Aus $\sin \beta = \frac{8 \sin 30^\circ}{5} = 0,8$ folgen:

$$\beta_1 \approx 53,13^\circ, \quad \gamma_1 \approx 96,87^\circ, \quad c_1 \approx 9,93 \text{ cm},$$

$$\beta_2 \approx 126,87^\circ, \quad \gamma_2 \approx 23,13^\circ, \quad c_2 \approx 3,93 \text{ cm}.$$

Beide dritten Winkel sind positiv. Mit $c_i = 5 \sin \gamma_i / \sin 30^\circ$ erhält man die Seiten; exakt sind sie $4\sqrt{3} + 3$ und $4\sqrt{3} - 3$ cm.

Проверка: обе конфигурации имеют исходные стороны 5, 8 и угол 30° напротив стороны 5; рисунок без дополнительных условий не отменяет вторую ветвь.

Содержание

Нажми название или номер страницы. Закладки PDF повторяют разделы. Ответы открывай после собственной попытки.

1	Стороны относительно выбранного угла . . .	1	9	Пример: периметр	8
2	Теорема синусов (Sinussatz)	3	10	Пример: итог	9
3	Теорема косинусов (Kosinussatz)	4	11	3 ошибки на этой теме	10
4	Площадь (Flächeninhalt)	5	12	Три инструмента	11
5	Четырёхугольник как два треугольника . . .	5	13	Мини-словарь	12
6	Разбор задачи EPM от 16.03.2026	6	14	Как записать ответ на экзамене	12
7	Пример: диагональ AC	7	15	Самостоятельные вычисления	13
8	Пример: площадь	8		Ответы к самостоятельным вычислениям	14