

# Tangente, Normale, Winkel

## Производная как наклон касательной

У прямой наклон одинаков на всей длине: если при шаге вправо на единицу она поднимается на два, то при шаге на три поднимется на шесть. У кривой направление меняется от точки к точке.

Чтобы описать направление кривой в выбранной точке, проведём через неё прямую с таким же наклоном. Это касательная, по-немецки **Tangente**. Сначала разберёмся, как связаны наклон прямой и её уравнение: тогда формула касательной получится из уже понятного движения по рисунку.

## От движения по прямой к касательной

Пусть на прямой известна точка  $P(a|f(a))$ , а её наклон равен  $k$ . До другой абсциссы  $x$  мы сместились по горизонтали на  $x - a$ . Высота при этом изменилась на  $k(x - a)$ , поэтому

$$y - f(a) = k(x - a).$$

Остаётся выбрать наклон самой касательной. Его даёт производная в точке:  $k = f'(a)$ . Подставим её в уже полученное уравнение:

$$t: y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Здесь  $a \in D_f$ , а производная  $f'(a)$  существует и конечна. Если касательная вертикальна, такая запись через конечный наклон не подходит; этот случай рассматривается отдельно. На самой прямой равенство точное. Для близких точек кривой оно обычно лишь приближённо описывает изменение высоты.

Когда требуется уравнение касательной, в решении достаточно показать, откуда взялись точка  $P$  и наклон  $k$ , а затем подставить их в эту формулу.

У этих двух подстановок разные роли:  $f(a)$  задаёт высоту точки, а  $f'(a)$  — направление прямой. В примере ниже найдём оба числа и проверим, что полученная касательная проходит через нужную точку.

# 1 Касательная (Tangente)

## М Формула касательной

| Что есть                          | Что записать                  |
|-----------------------------------|-------------------------------|
| точка $x = a$                     | $P(a f(a))$                   |
| наклон графика                    | $k_t = f'(a)$                 |
| Tangente in $x = a$               | $t : y = f(a) + f'(a)(x - a)$ |
| Tangente hat Steigung $k$         | $f'(a) = k$                   |
| Tangente parallel zu $y = kx + d$ | $f'(a) = k$                   |

## ex Мини-пример

$$f(x) = x^2 + 1, \quad a = 2.$$

$$f(2) = 5, \quad f'(x) = 2x, \quad f'(2) = 4.$$

Число 5 задаёт высоту точки, число 4 — наклон прямой через неё. Почему производная описывает направление кривой? Возьмём ещё точку при  $x = 2 + h$ ,  $h \neq 0$ . У секущей через две точки наклон равен

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{4h + h^2}{h} = 4 + h.$$

Когда  $h$  стремится к нулю, наклон секущей стремится к 4. Этот предельный наклон и есть  $f'(2)$ . Tangente:

$$t : y = 5 + 4(x - 2) = 4x - 3.$$

Проверим точку: при  $x = 2$  прямая даёт  $4 \cdot 2 - 3 = 5$ , то есть проходит через  $P(2|5)$ . Наклон равен 4, как и у графика в этой точке. Так получено полное уравнение касательной; одно число  $f'(2) = 4$  задаёт только её наклон.

## I 2 Нормаль (Normale)

**Normale** — это прямая, перпендикулярная касательной в точке касания.

Вдоль касательной можно сместиться на 1 вправо и на  $k_t$  по вертикали. После поворота этого перемещения на  $90^\circ$  получим  $-k_t$  по горизонтали и 1 по вертикали. Отношение вертикального изменения к горизонтальному даёт наклон нормали, если  $k_t \neq 0$ :

$$k_n = -\frac{1}{k_t}.$$

Уравнение нормали:

$$n : y = f(a) + k_n(x - a).$$

Для уже рассмотренной точки  $(2|5)$  у  $x^2 + 1$  получаем  $k_n = -1/4$  и  $n : y = 5 - \frac{1}{4}(x - 2)$ . Обе прямые проходят через одну точку, а их наклоны удовлетворяют  $4 \cdot (-1/4) = -1$ .

Если  $k_t = 0$ , касательная горизонтальная, а нормаль вертикальная:

$$n : x = a.$$

### Касательная и нормаль рядом

| Объект            | Формула                                    |
|-------------------|--------------------------------------------|
| Tangente          | $t : y = f(a) + f'(a)(x - a)$              |
| Steigung Tangente | $k_t = f'(a)$                              |
| Steigung Normale  | $k_n = -\frac{1}{k_t}$ , если $k_t \neq 0$ |
| Normale           | $n : y = f(a) + k_n(x - a)$                |

## I 3 Параллельные и перпендикулярные прямые

### Как доставать наклон прямой

Общий вид  $Ax + By + C = 0$  задаёт прямую только при  $(A, B) \neq (0, 0)$ .

| Форма прямой                | Наклон                                                        |
|-----------------------------|---------------------------------------------------------------|
| $y = kx + d$                | $k$ уже виден                                                 |
| $Ax + By + C = 0, B \neq 0$ | $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ , значит $k = -\frac{A}{B}$ |
| $x = c$                     | вертикальная прямая, наклон не задаётся числом                |
| $y = c$                     | горизонтальная прямая, $k = 0$                                |

**M** Parallel / senkrecht

| Фраза в условии           | Что записать                                    |
|---------------------------|-------------------------------------------------|
| Tangente parallel zu $g$  | $k_t = k_g$                                     |
| Tangente senkrecht zu $g$ | $k_t \cdot k_g = -1$ , если оба наклона конечны |
| Normale zu $f$            | $k_n = -\frac{1}{f'(a)}$ , если $f'(a) \neq 0$  |
| Tangente waagrecht        | $f'(a) = 0$                                     |

**E** Горизонтальная и вертикальная прямые

Формула  $k_1 k_2 = -1$  работает только тогда, когда оба наклона задаются числами. Вертикальная прямая  $x = c$  перпендикулярна горизонтальной  $y = d$ ; у вертикальной прямой нет конечного значения  $k$ .

**ex** Прямая в общем виде

$$g : 3x - y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 3x, \quad k_g = 3.$$

Если касательная параллельна  $g$  в точке с  $x = 1$ , то:

$$f'(1) = 3.$$

**4** Угол наклона (Steigungswinkel)

## Как угол связан с наклоном?

**Steigungswinkel** — направленный угол от положительного направления оси  $x$  к прямой. Обычно его выбирают в диапазоне  $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ . Для возрастающей прямой нарисуем прямоугольный треугольник: горизонтальное изменение равно  $\Delta x$ , вертикальное —  $\Delta y$ . И наклон, и тангенс угла равны отношению  $\Delta y / \Delta x$ . Для убывающей прямой это отношение отрицательно; направленный угол учитывает тот же знак. При конечном наклоне

$$k = \tan(\alpha).$$

Калькулятор сначала даёт главное значение:

$$\alpha_0 = \arctan(k).$$

Если нужен направленный угол наклона и  $\alpha_0 < 0^\circ$ , прибавь  $180^\circ$ . Например, при  $k = -1$  получаем  $\alpha = 135^\circ$ . Если спрашивают острый угол (**spitzer Winkel**) с осью  $x$ , берут:

$$\beta = \arctan(|k|), \quad k \neq 0.$$

Для горизонтальной прямой угол с осью  $x$  равен  $0^\circ$ , для вертикальной —  $90^\circ$ ; ни один из них не является острым. Если ответ нужен в градусах, вычисляй  $\arctan$  в режиме DEG.

Не путай  $k$  и  $\alpha$ . Сначала найти наклон, потом угол.

### **М** Угол между двумя прямыми

Пусть направленные углы двух прямых равны  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Их разность задаёт угол поворота от одной прямой к другой. Подставляя  $\tan \alpha_1 = k_1$  и  $\tan \alpha_2 = k_2$  в формулу тангенса разности, получаем дробь ниже. Модуль позволяет выбрать меньший угол. Здесь  $\varphi$  — меньший неотрицательный угол между направлениями прямых:  $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ . У параллельных прямых он равен нулю.

Что дано

Формула

конечные наклоны  $k_1$  и  $k_2$ ,  $1 + k_1 k_2 \neq 0$

$$\tan(\varphi) = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$$

$k_1 k_2 = -1$

прямые перпендикулярны,  $\varphi = 90^\circ$

одна прямая горизонтальна

угол можно искать через наклон второй прямой

### **ex** Мини-пример: угол между прямыми

Для  $k_1 = 0$  и  $k_2 = 1$ :

$$\tan \varphi = \left| \frac{1 - 0}{1 + 0} \right| = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 45^\circ.$$

Если  $1 + k_1 k_2 = 0$ , дробь не вычисляем: прямые сразу перпендикулярны и  $\varphi = 90^\circ$ .

### **!** Частая ошибка

Если  $k < 0$ , калькулятор может дать отрицательный угол. Для **spitzer Winkel** при конечном ненулевом наклоне нужен угол:

$$\arctan(|k|).$$

## 5 Пример 1: нормаль к корневой функции

Пример из исходного конспекта:

$$f(x) = \sqrt{6x - 3}.$$

Нужно составить нормаль к графику в точке  $P(2|y)$ . Область функции:  $x \geq \frac{1}{2}$ ; формулу производной ниже используем при  $x > \frac{1}{2}$ .

Сначала координата точки:

$$f(2) = \sqrt{12 - 3} = 3 \Rightarrow P(2|3).$$

Корень запишем как  $(6x - 3)^{1/2}$ . По правилу цепочки показатель  $1/2$  становится множителем, степень уменьшается на единицу, затем умножаем на производную  $6x - 3$ , равную 6:

$$f'(x) = \frac{3}{\sqrt{6x - 3}}.$$

Наклон касательной:

$$k_t = f'(2) = \frac{3}{3} = 1.$$

Наклон нормали:

$$k_n = -1.$$

Normale:

$$n : y = 3 - 1(x - 2) = -x + 5.$$

## 6 Пример 2: параллельная касательная, вариант EPM от 18.02.2026

После восстановления функции из условия получалась:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + \frac{9}{4}.$$

В условии было: Tangente im Punkt  $P(1|4)$  ist parallel zu

$$g : 3x - y = 0.$$

Прямая:

$$3x - y = 0 \Rightarrow y = 3x \Rightarrow k_g = 3.$$

Проверка наклона:

$$f'(x) = -x^3 + 4x, \quad f'(1) = 3.$$

Касательная:

$$t : y = 4 + 3(x - 1) = 3x + 1.$$

Нормаль:

$$k_n = -\frac{1}{3}, \quad n : y = 4 - \frac{1}{3}(x - 1) = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}.$$

## 7 Пример 3: касание, вариант EPM от 22.01.2026

Источник: предоставленный снимок с заголовком EPM 22.01.2026, задача 3.

### Касание прямой в точке перегиба

В задаче была прямая:

$$g: \frac{3}{2}x + y - \frac{1}{4} = 0.$$

Она касалась графика в точке перегиба при  $x = \frac{1}{2}$ .

Переводим прямую:

$$g(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}, \quad g'(x) = -\frac{3}{2}.$$

Точка касания:

$$y = g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Касательная в этой точке совпадает с данной прямой:

$$t: y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}.$$

Нормаль:

$$k_n = -\frac{1}{-3/2} = \frac{2}{3}.$$

$$n: y = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}x - \frac{5}{6}.$$

#### Почему это важно

**berührt** означает не только общую точку, но и общий наклон:

$$f(a) = g(a), \quad f'(a) = g'(a).$$

## 8 Пример 4: угол наклона, вариант EPM от 16.03.2026

### Угол касательной в точке перегиба

В задаче после восстановления функции получалось:

$$f(x) = 5x^3 + \frac{15}{2}x^2.$$

Точка перегиба:

$$W\left(-\frac{1}{2} \middle| \frac{5}{4}\right).$$

Нужно было найти острый угол наклона касательной в точке перегиба.

Производная:

$$f'(x) = 15x^2 + 15x.$$

Наклон касательной в точке перегиба:

$$k = f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 15 \cdot \frac{1}{4} - \frac{15}{2} = -\frac{15}{4}.$$

Острый угол с осью  $x$ :

$$\beta = \arctan\left(\left|-\frac{15}{4}\right|\right) = \arctan\left(\frac{15}{4}\right) \approx 75,1^\circ.$$

## 9 Типичные ошибки

### ! Что проверить в решении

- нашли  $f'(a)$ , но не нашли точку  $P(a|f(a))$ ;
- записали касательную без полного уравнения прямой;
- для нормали забыли взять отрицательный обратный наклон;
- перевели  $Ax + By + C = 0$  в вид  $y = kx + d$ , не проверив  $B \neq 0$ ;
- при **parallel** перепутали одинаковые наклоны с одинаковыми свободными членами;
- при **berührt** записали только равенство значений, но забыли равенство производных;
- для отрицательного  $k$  записали отрицательный угол, хотя спрашивали острый угол.

### E Быстрая проверка

Для любой касательной спроси себя:

точка есть?    наклон есть?    уравнение прямой есть?

## 10 Самопроверка

### ☒ Реши коротко

Контекст: если не сказано иначе, работай с  $f(x) = x^2 - 3x$  в точке  $x_0 = 2$ .

1. Найди касательную при  $x = 2$ .
2. Найди нормаль при  $x = 2$ .
3. Прямая  $g : 4x - y + 1 = 0$ . Чему равен  $k_g$ ?
4. Tangente parallel zu  $g : 4x - y + 1 = 0$  bei  $x = a$ . Что записать?
5. Tangente bei  $x = a$  hat Steigungswinkel  $45^\circ$ . Что записать через  $f'$ ?
6. Даны наклоны  $k_1 = 2$  и  $k_2 = -\frac{1}{2}$ . Что можно сказать о прямых?

**A** Antworten

1.  $f(2) = -2$ ,  $f'(x) = 2x - 3$ ,  $f'(2) = 1$ , значит  $t : y = -2 + 1(x - 2) = x - 4$ .
2.  $k_n = -1$ , значит  $n : y = -2 - 1(x - 2) = -x$ .
3.  $g : y = 4x + 1$ , значит  $k_g = 4$ .
4.  $f'(a) = 4$ .
5.  $f'(a) = \tan(45^\circ) = 1$ .
6.  $k_1 k_2 = -1$ , значит прямые перпендикулярны.

☒ Самостоятельно: особый случай**Авторская тренировочная задача.**

Gegeben ist  $h(x) = x^3 - 3x$ . Bestimmen Sie die Tangente und die Normale im Punkt  $P(1|y_P)$ . Welchen Winkel schließt die Tangente mit der  $x$ -Achse ein? Begründen Sie, warum die Formel für die Normalensteigung hier nicht angewendet werden kann.

Сначала запиши собственное решение. Проверь, проходят ли обе прямые через найденную точку.

**A Ключ: горизонтальная касательная**

$h(1) = -2$ ,  $h'(x) = 3x^2 - 3$ ,  $h'(1) = 0$ . Получаем  $P(1 | -2)$ , касательную  $t : y = -2$  и нормаль  $n : x = 1$ . Угол с осью  $x$  равен  $0^\circ$ ; это не острый угол.

Die Tangente ist waagrecht, da  $h'(1) = 0$  gilt. Die Normale ist senkrecht zur  $x$ -Achse und hat keine endliche Steigung.

В  $-1/h'(1)$  пришлось бы делить на ноль. Перпендикуляр к горизонтальной прямой записываем уравнением  $x = 1$ . Обе прямые проходят через  $(1 | -2)$ .

**Проверь перед завершением**

Вернись к вопросу задачи. Проверь область определения, границы, знаки и единицы; запиши ответ в требуемом виде. По записи должно быть понятно, откуда взялись условия и результат.

Материалы серии: [demidmath.com](https://demidmath.com) [t.me/demidmath](https://t.me/demidmath)

# Справка для повторения

➡

## Мини-алгоритм на ЕРМ

- 1

Найди точку касания:  $P(a|f(a))$ .
- 2

Найди наклон:  $k_t = f'(a)$ .
- 3

Запиши касательную:  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ .
- 4

Для нормали используй  $k_n = -\frac{1}{k_t}$  при  $k_t \neq 0$ ; при  $k_t = 0$ :  $x = a$ .
- 5

Направленный угол:  $k = \tan \alpha$ ; острый угол при  $k \neq 0$ :  $\beta = \arctan |k|$ .

## Содержание

Нажми название или номер страницы. Закладки PDF повторяют разделы. Ответы открывай после собственной попытки.

|                                                                           |   |                                            |                                                             |    |
|---------------------------------------------------------------------------|---|--------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|----|
| От движения по прямой к касательной . . . . .                             | 1 | 7                                          | Пример 3: касание, вариант ЕРМ от 22.01.2026 . . . . .      | 7  |
| 1 Касательная (Tangente) . . . . .                                        | 2 | 8                                          | Пример 4: угол наклона, вариант ЕРМ от 16.03.2026 . . . . . | 8  |
| 2 Нормаль (Normale) . . . . .                                             | 3 | 9                                          | Типичные ошибки . . . . .                                   | 8  |
| 3 Параллельные и перпендикулярные прямые . . . . .                        | 3 | 10                                         | Самопроверка . . . . .                                      | 9  |
| 4 Угол наклона (Steigungswinkel) . . . . .                                | 4 | Antworten . . . . .                        |                                                             | 10 |
| 5 Пример 1: нормаль к корневой функции . . . . .                          | 6 | Ключ: горизонтальная касательная . . . . . |                                                             | 11 |
| 6 Пример 2: параллельная касательная, вариант ЕРМ от 18.02.2026 . . . . . | 6 | Справка для повторения . . . . .           |                                                             | 12 |