

Normalverteilung

Площадь под кривой, стандартное значение и большие n

В задаче величина описывается нормальным распределением. На рисунке этой модели видна симметричная колоколообразная кривая: возле середины она выше, по краям ниже. Как по такому рисунку найти вероятность попасть в заданный промежуток?

Нужно смотреть на площадь под кривой над этим промежутком. Высота в отдельной точке вероятностью не является. Сначала разберём, где находится середина и как измеряется разброс; затем станет понятно, как читать границы на общей для всех таких задач шкале.

Середина, разброс и новая шкала

Среднее обозначим μ (**Mittelwert**). Стандартное отклонение $\sigma > 0$ (**Standardabweichung**) задаёт масштаб разброса. Например, при $\mu = 100$ и $\sigma = 15$ граница 130 отстоит от среднего на 30, то есть на два стандартных отклонения. На новой шкале ей соответствует $z = 2$.

Для любой границы сначала вычитаем среднее, затем делим на масштаб:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}.$$

Среднее переходит в ноль, а одно стандартное отклонение — в единицу. Это преобразование называется стандартизацией. Оно позволяет пользоваться одной таблицей для разных нормальных распределений.

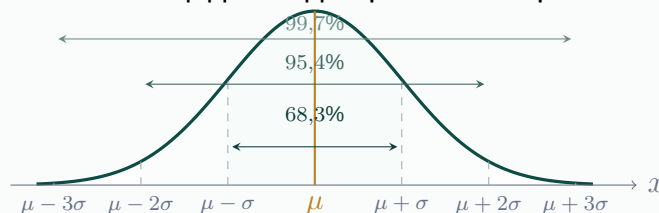
В этой памятке запись $X \sim N(\mu, \sigma)$ означает нормальную модель с указанными средним и стандартным отклонением. Для стандартной модели $Z \sim N(0, 1)$ функция $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ даёт площадь слева от границы z . В нашем примере $P(X \leq 130) = \Phi(2)$. Нормальность должна быть дана в условии или обоснована процессом; одного расположения данных возле среднего недостаточно.

Е Неодинаковые обозначения в книгах

Здесь второй параметр в $N(\mu, \sigma)$ — стандартное отклонение. Во многих книгах ту же модель записывают как $N(\mu, \sigma^2)$, то есть вторым параметром указывают дисперсию. Перед вычислением всегда проверь принятую в условии или таблице договорённость.

✓ Сигма-интервалы (Sigma-Regeln)

Правило распределения площадей под нормальной кривой:



- В интервал $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ попадает примерно 68,3% всех значений;
- В интервал $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$ попадает примерно 95,4% всех значений;
- В интервал $[\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$ попадает почти всё: 99,7% всех значений.

Как считать вероятности

Функция Φ всегда отсчитывает площадь от левого края кривой. Поэтому площадь справа от границы получаем, вычитая левую часть из единицы: полная площадь под кривой равна 1. Для промежутка от a до b берём всю площадь слева от b и убираем лишнюю часть слева от a . Так возникает разность двух значений Φ , а не их сумма.

М Три стандартные формы

Вопрос	Запись
höchstens b	$P(X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$
mindestens a	$P(X \geq a) = 1 - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$
zwischen a und b	$P(a \leq X \leq b) = \Phi(z_b) - \Phi(z_a)$

$$z_a = \frac{a - \mu}{\sigma}, \quad z_b = \frac{b - \mu}{\sigma}.$$

! Если величина изначально непрерывная

У отдельной точки нет ширины, поэтому площадь над ней равна нулю: $P(X = a) = 0$. В непрерывной модели $P(X < a) = P(X \leq a)$, и границу a не нужно заменять на $a - 1$. Если прибор показывает округлённое значение, за этой записью уже стоит небольшой интервал, и его вероятность может быть положительной.

Е Как не потеряться в таблице

Перед таблицей всегда реши, какую область под кривой ищешь: слева от границы, справа от границы или между двумя границами. Только потом считай z и подставляй в Φ .

Пример с таблицей

LED: höchstens 950 Stunden

Продолжительность работы лампы X измеряется в часах. По условию среднее равно 900, а стандартное отклонение — 100:

$$X \sim N(900, 100).$$

Слово **höchstens** означает «не более». Нас интересует площадь слева от 950:

$$P(X \leq 950).$$

Граница на 50 часов выше среднего. В единицах стандартного отклонения это

$$z = \frac{950 - 900}{100} = 0,5.$$

Таблица левых вероятностей для $z = 0,50$ даёт

$$\Phi(0,5) \approx 0,6915.$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 69,2%.

Е Что брать из таблицы

Таблица Φ даёт вероятность слева от z :

$$\Phi(0,5) = P(Z \leq 0,5).$$

Если в таблице только неотрицательные z , используй симметрию: $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$. В частности, $\Phi(0) = 0,5$. Проверь заголовки таблицы: площадь от 0 до z отличается от $\Phi(z)$.

Интервал

Zwischen 750 und 1050 Stunden

Рассмотрим те же лампы, но теперь оставим только времена работы между двумя границами:

$$X \sim N(900, 100).$$

Искомое событие записывается как

$$P(750 \leq X \leq 1050).$$

Обе границы находятся на расстоянии 150 часов от среднего, то есть на 1,5 стандартного отклонения. Левая граница получает знак минус:

$$z_1 = \frac{750 - 900}{100} = -1,5, \quad z_2 = \frac{1050 - 900}{100} = 1,5.$$

Площадь слева от 1,5 включает и ненужный левый хвост до $-1,5$. Вычтем его:

$$P(750 \leq X \leq 1050) = \Phi(1,5) - \Phi(-1,5).$$

$$\Phi(1,5) \approx 0,9332, \quad \Phi(-1,5) \approx 0,0668.$$

$$P \approx 0,8664.$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 86,6%.

Обратная задача

Е Найти границу

Какое время работы не превышают 80% LED? Обозначим неизвестную границу через c : $P(X \leq c) = 0,80$. Теперь известна площадь, а найти нужно точку, которая её отсекает. Внутри таблицы ищем вероятность, ближайшую к 0,80, и читаем соответствующее $z \approx 0,84$. Это граница на стандартной шкале, ещё не время в часах. Из $z = (c - \mu)/\sigma$ получаем $z\sigma = c - \mu$, поэтому

$$c = \mu + z\sigma = 900 + 0,84 \cdot 100 = 984.$$

Etwa 80% der LEDs leuchten höchstens 984 Stunden. Число получено по округлённой табличной границе.

Е Если спрашивают верхние 20%

$$P(X \geq c) = 0,20$$

это то же самое, что

$$P(X \leq c) = 0,80.$$

Нормальная или биномиальная модель?

М Как не перепутать модель

Признак	Модель
n независимых испытаний с постоянным p , считаем успехи	биномиальное распределение: $X \sim B(n, p)$
успехов и неудач ожидается много	биномиальную вероятность можно приблизить нормальной после проверки условий
измеряем рост, массу, время, длину и модель обоснована	нормальное распределение: $X \sim N(\mu, \sigma)$
даны только среднее и стандартное отклонение	этого недостаточно для выбора распределения
дана нормальная модель, ищем границу по проценту	обратная задача через z

Большое n : Normalapproximation

Пусть точная модель

$$X \sim B(n, p).$$

Если ожидаемых успехов и неудач достаточно много, форму биномиального распределения можно приблизить нормальной кривой. В этой серии используем практическую проверку

$$np \geq 10, \quad n(1-p) \geq 10.$$

Само по себе большое n недостаточно: при p , очень близком к 0 или 1, одна из этих величин может остаться маленькой. Это ориентир, а не оценка ошибки. При доступном точном биномиальном расчёте приближение не обязательно.

Для вычисления вводим непрерывную приближающую величину

$$X_N \sim N\left(\mu = np, \sigma = \sqrt{np(1-p)}\right).$$

Точная модель X при этом остаётся биномиальной.

Сначала запиши $X \sim B(n, p)$, затем проверку двух условий, μ , σ и только после этого переход к X_N .

Е Сопоставление с учебником

В **Mathe_gesamt_2026**, с. 189 (PDF: 190), приведены правила $np, n(1-p) \geq 5$ либо $np(1-p) > 9$; примеры там решены без поправки. Здесь выбрана более строгая проверка $np, n(1-p) \geq 10$ и показана поправка на непрерывность. В решении указывай выбранный способ: небольшое расхождение с таблицей или ключом может быть следствием приближения.

М Поправка на непрерывность 0,5

Для целых a, b, k биномиальный столбик при k представляем промежутком от $k - 0,5$ до $k + 0,5$. Поэтому:

Биномиальное событие	Нормальное приближение
$P(X \leq k)$	$P(X_N \leq k + 0,5)$
$P(X < k) = P(X \leq k - 1)$	$P(X_N \leq k - 0,5)$
$P(X \geq k)$	$P(X_N \geq k - 0,5)$
$P(X > k) = P(X \geq k + 1)$	$P(X_N \geq k + 0,5)$
$P(X = k)$	$P(k - 0,5 \leq X_N \leq k + 0,5)$
$P(a \leq X \leq b)$	$P(a - 0,5 \leq X_N \leq b + 0,5)$

ex Streaming: weniger als 170 von 250

Пусть X считает пользователей сервиса среди 250 независимо выбранных людей, а вероятность использования для каждого равна 0,7. Сначала определим центр и разброс приближающей нормальной кривой:

$$X \sim B(250, 0,7), \quad \mu = 175, \quad \sigma = \sqrt{52,5} \approx 7,246.$$

$$np = 175 \geq 10, \quad n(1-p) = 75 \geq 10.$$

Обе проверки выполнены. Слова **weniger als 170** означают не более 169: число пользователей целое. Последний включённый столбик заканчивается на 169,5, поэтому именно эту границу переводим на стандартную шкалу.

$$P(X < 170) = P(X \leq 169) \approx P(X_N \leq 169,5).$$

$$z = \frac{169,5 - 175}{\sqrt{52,5}} \approx -0,759, \quad P \approx \Phi(-0,759) \approx 0,2239.$$

То есть вероятность составляет приблизительно 22,4%. Точный биномиальный результат: 22,28%; разница около 0,11 процентного пункта.

! Где не ставят 0,5

Поправка нужна только при переходе от дискретной биномиальной величины к непрерывной нормальной. Если величина изначально непрерывная, например время работы лампы, её заданные границы на 0,5 не сдвигают.

M Как писать на экзамене

Строка решения	Что написать
Zufallsvariable	$X =$ измеряемая величина
Modell	$X \sim N(\mu, \sigma)$
Ereignis	$P(X \leq b)$, $P(X \geq a)$ или $P(a \leq X \leq b)$
Standardisierung	$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$
Antwortsatz	вероятность или граница с Einheit

Типичные ошибки

! Что проверить в решении

- перепутали μ и σ ;
- забыли стандартизацию $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$;
- для $P(X \geq a)$ забыли сделать $1 - \Phi(z)$;
- в интервале взяли только одну границу;
- использовали $a - 1$ как в биномиальном распределении;
- при приближении биномиального распределения проверили только большое n , но не np и $n(1 - p)$;
- при нормальном приближении забыли поправку на непрерывность 0,5;
- в обратной задаче нашли z , но не вернулись к $x = \mu + z\sigma$.

Итоговая памятка

$$X \sim N(\mu, \sigma), \quad z = \frac{x - \mu}{\sigma}.$$

$$\begin{aligned} P(X \leq b) &= \Phi(z_b), & P(X \geq a) &= 1 - \Phi(z_a), \\ P(a \leq X \leq b) &= \Phi(z_b) - \Phi(z_a), & \Phi(z) = q &\Rightarrow x = \mu + z\sigma. \end{aligned}$$

Для $X \sim B(n, p)$ при $np, n(1-p) \geq 10$:

$$X_N \sim N\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right) \quad \text{и поправка } 0,5.$$

Подсказки для калькулятора (GTR/CAS)

Названия и порядок аргументов зависят от модели калькулятора. По смыслу нужны:

- **normPdf** — плотность в точке, а не $P(X = x)$; для нормальной величины $P(X = x) = 0$;
- **normCdf** — вероятность интервала $P(a \leq X \leq b)$; для хвоста используйте предусмотренную устройством бесконечную границу;
- для приближения биномиальной вероятности в **normCdf** вводим уже исправленные границы: например, 169,5, а не 169 для $P(X \leq 169)$;
- **invNorm** — граница c по левой вероятности $P(X \leq c) = q$, $0 < q < 1$.

Проверка результата: вероятность лежит в $[0; 1]$, а найденная граница выражена в единицах исходной величины.

Самопроверка: сначала без ответа

Übungsaufgabe: Füllmenge

Die Füllmenge X einer Packung ist normalverteilt mit dem Mittelwert 500 ml und der Standardabweichung 4 ml.

1. Berechnen Sie $P(492 \leq X \leq 508)$.
2. Bestimmen Sie c , sodass 90% der Packungen höchstens c ml enthalten.
3. Geben Sie $P(X = 500)$ an. Warum ist das Ergebnis mit einem Mittelwert von 500 ml vereinbar?

В этой задаче X изначально непрерывная: границы не сдвигаются на 0,5.

Ответы к самопроверке

Е Lösung

$$z_1 = \frac{492 - 500}{4} = -2, \quad z_2 = \frac{508 - 500}{4} = 2.$$

$$P(492 \leq X \leq 508) = \Phi(2) - \Phi(-2) \approx 0,9545 = 95,45\%.$$

Für die obere Grenze gilt:

$$\Phi(z_c) = 0,9, \quad z_c \approx 1,28155, \quad c = 500 + 4z_c \approx 505,13 \text{ ml}.$$

Die Normalverteilung ist stetig, daher ist $P(X = 500) = 0$. Ein einzelner Punkt hat keine Fläche; Intervalle um 500 können eine positive Wahrscheinlichkeit haben.

Среднее 500 мл задаёт центр распределения. Оно не означает, что ровно это число обязательно появляется в выборке.

Содержание

Нажми название или номер страницы. Закладки PDF повторяют разделы. Ответы открывай после собственной попытки.

Середина, разброс и новая шкала	1	Нормальная или биномиальная модель?	5
Как считать вероятности	2	Типичные ошибки	7
Пример с таблицей	3	Самопроверка: сначала без ответа	8
Интервал	4	Ответы к самопроверке	9
Обратная задача	4		