

Streaming — задача 6 из снимка

M Originale Aufgabenstellung

6.) Ein Streaminganbieter bietet entweder ein „Spielfilmpaket“ an (nur Spielfilme) oder ein „Komplettpaket“ (alle Streamingangebote).
Unter den Kunden des Streaminganbieters sind 70% höchstens 40 Jahre. Von diesen haben 80% das „Komplettpaket“ gewählt. Unter den Kunden, die älter als 40 Jahre sind, haben 50% das „Komplettpaket“ gewählt.
a) Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Kunde sich für das „Komplettpaket“ entschieden hat.
b) Es werden 10 Kunden zufällig ausgewählt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 2 der 10 Kunden älter als 40 Jahre alt sind.
c) Unter allen Kunden werden 250 zufällig ausgewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
(i) weniger als 170 Kunden höchstens 40 Jahre alt sind, und
(ii) die Anzahl der Kunden, die höchstens 40 Jahre alt sind und um maximal 10 von dem Erwartungswert abweichen

M Перевод условия

У стримингового сервиса есть два тарифа: пакет только с фильмами (**Spielfilmpaket**) и полный пакет (**Komplettpaket**).

70% клиентов не старше 40 лет (**höchstens 40 Jahre alt**). Из них 80% выбирают полный пакет.

30% клиентов старше 40 лет (**älter als 40 Jahre**). Из них 50% выбирают полный пакет.

Часть а (Teil a). Построить дерево вероятностей (**Baumdiagramm**) и найти $P(K)$.

Часть b (Teil b). Для 10 клиентов найти вероятность того, что как минимум 2 из них старше 40 лет.

Часть с (Teil c). Среди 250 случайно выбранных клиентов найти вероятность того, что (i) клиентов не старше 40 лет меньше 170; (ii) их количество отличается от математического ожидания не более чем на 10.

Идея решения

В пункте а сначала разделим клиентов на две возрастные группы. Число 80% относится только к группе не старше 40 лет, а 50% — только к старшей. Поэтому умножаем долю каждой группы на долю полного пакета внутри неё. Получаются два несовместимых пути к одному событию K ; их вероятности можно сложить. С этой записью построим дерево, а число клиентов в следующих пунктах рассмотрим отдельно.

a) Baumdiagramm und $P(K)$

E Baumdiagramm

Gegeben.

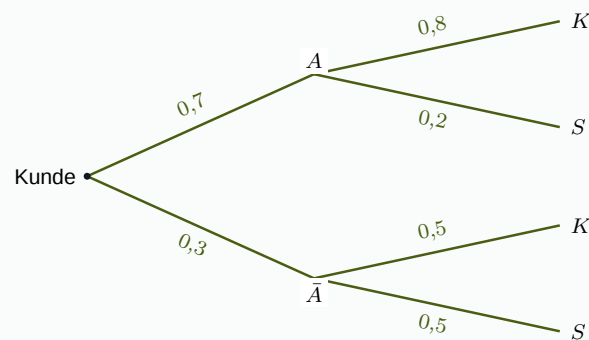
$$P(A) = 0,7, \quad P(\bar{A}) = 0,3$$

$$P(K | A) = 0,8, \quad P(K | \bar{A}) = 0,5.$$

Dabei bedeutet:

A = höchstens 40 Jahre, $\bar{A}$ = älter als 40 Jahre.

K = Komplettpaket, S = Spielfilmpaket.



E Komplettpaket berechnen

Ansatz.

$$P(K) = P(A) \cdot P(K | A) + P(\bar{A}) \cdot P(K | \bar{A}).$$

Rechnung.

$$P(K) = 0,7 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,5 = 0,56 + 0,15 = 0,71.$$

Antwort.

$$P(K) = 0,71 = 71\%$$

Для подсчёта клиентов примем независимые выборы с постоянной вероятностью возрастной группы. При выборе разных людей без возвращения из конечной базы это приближение; оно уместно при малой доле выборки. В пункте b считаем клиентов старше 40 лет, в c — не старше 40; поэтому вероятности успеха различаются.

b) Mindestens 2 Kunden älter als 40

«Как минимум двое» включает 2, 3, ..., 10 человек. Проще вычесть из единицы два оставшихся случая: ни одного или ровно один. Для ровно одного старшего клиента возможны 10 позиций в выборке, поэтому появляется $\binom{10}{1} = 10$. Остальные девять должны относиться к младшей группе.

Binomialmodell

Gegeben. Es werden 10 Kunden zufällig ausgewählt. Wir nehmen unabhängige Auswahl mit konstanter Erfolgswahrscheinlichkeit an.

Ansatz. Wir zählen die Kunden, die **älter als 40** sind:

$$X = \text{Anzahl der Kunden älter als 40.}$$

$$X \sim B(n = 10, p = 0,3).$$

Gesucht:

$$P(X \geq 2).$$

Rechnung.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1).$$

$$P(X \geq 2) = 1 - 0,7^{10} - \binom{10}{1} \cdot 0,3 \cdot 0,7^9.$$

$$P(X \geq 2) \approx 0,8507.$$

Antwort.

$$P(X \geq 2) \approx 85,07\%$$

Комментарий

В b считаются клиенты **старше 40**, поэтому вероятность успеха $p = 0,3$. Нельзя автоматически брать 0,7 из первой строки условия.

c) 250 Kunden: höchstens 40 Jahre

Теперь считаем другую возрастную группу, поэтому $p = 0,7$. Среднее число таких клиентов обозначаем $\mu = np$, а величину разброса — $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$. Нормальное приближение заменяет столбики вероятностей плавной кривой с теми же средним и стандартным отклонением.

E Binomialmodell und Normalapproximation

Gegeben. Es werden 250 Kunden zufällig ausgewählt. Es gilt dieselbe Modellannahme wie in b.

Ansatz. Jetzt zählen wir Kunden, die **höchstens 40 Jahre alt** sind:

Y = Anzahl der Kunden höchstens 40 Jahre.

$$Y \sim B(n = 250, p = 0,7), \quad \mu = E(Y) = n \cdot p = 250 \cdot 0,7 = 175.$$

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{250 \cdot 0,7 \cdot 0,3} = \sqrt{52,5} \approx 7,246.$$

Für die Normalapproximation prüfen wir die Faustregel:

$$np = 175 \geq 10, \quad n(1-p) = 75 \geq 10.$$

Damit verwenden wir für die Rechnung

$$Y_N \sim N\left(\mu = 175, \sigma = \sqrt{52,5}\right).$$

E Модель и способ вычисления

Y по-прежнему считает целое число клиентов. В нормальном приближении каждому целому значению отводим полосу ширины 1: числу 170 соответствует полоса от 169,5 до 170,5. Событие $Y < 170$ включает значения лишь до 169, поэтому непрерывную площадь берём слева от 169,5. Так появляется поправка 0,5; модель Y остаётся биномиальной.

E c i) Weniger als 170

Граница 169,5 находится ниже среднего 175. Чтобы прочесть площадь по стандартной нормальной таблице, измеряем это отклонение в единицах σ : $z = (169,5 - 175)/\sigma$. Функция $\Phi(z)$ даёт площадь слева от z .

Ansatz.

$$\text{weniger als 170} \Rightarrow Y \leq 169.$$

Rechnung.

$$P(Y < 170) = P(Y \leq 169).$$

Mit Stetigkeitskorrektur:

$$P(Y \leq 169) \approx P(Y_N \leq 169,5).$$

$$z = \frac{169,5 - 175}{\sqrt{52,5}} \approx -0,759.$$

$$P(Y_N \leq 169,5) = \Phi(-0,759) \approx 0,2239.$$

Antwort.

$$P(Y < 170) \approx 22,4\%$$

c ii) Abweichung vom Erwartungswert

Отклонение не больше 10 означает расстояние от 175 в любую сторону: от 165 до 185 включительно. После поправки крайние столбики целиком попадут в интервал $[164,5; 185,5]$. Из площади слева от правого края вычтем площадь слева от левого: останется нужная полоса между ними.

E Maximal 10 vom Erwartungswert

Gegeben.

$$\mu = E(Y) = 175, \quad \sigma = \sqrt{52,5}.$$

Ansatz. Die Anzahl soll um maximal 10 vom Erwartungswert abweichen:

$$|Y - 175| \leq 10.$$

Also:

$$165 \leq Y \leq 185.$$

Rechnung. Mit Stetigkeitskorrektur werden die ganzzahligen Grenzen um 0,5 erweitert:

$$P(165 \leq Y \leq 185) \approx P(164,5 \leq Y_N \leq 185,5).$$

$$z_1 = \frac{164,5 - 175}{\sqrt{52,5}} \approx -1,449, \quad z_2 = \frac{185,5 - 175}{\sqrt{52,5}} \approx 1,449.$$

$$P \approx \Phi(1,449) - \Phi(-1,449) \approx 0,8527.$$

Antwort.

$$P(165 \leq Y \leq 185) \approx 85,3\%$$

E Проверка точным биномиальным расчётом

В принятой модели точные суммы дают

$$P(Y < 170) \approx 0,222759, \quad P(165 \leq Y \leq 185) \approx 0,852974.$$

Нормальное приближение даёт 0,223905 и 0,852701 соответственно. Условие на снимке не требует конкретно нормального приближения.

! Typische Fehler

- In b das falsche p verwenden: dort geht es um **älter als 40**, also $p = 0,3$.
- Bei c(i) aus „weniger als 170“ fälschlich $Y \leq 170$ machen. Richtig ist $Y \leq 169$.
- Die Normalapproximation verwenden, ohne vorher np und $n(1 - p)$ zu prüfen oder ohne $\mu = 175$ und $\sigma = \sqrt{52,5}$ zu bestimmen.
- Die Stetigkeitskorrektur vergessen: aus $Y \leq 169$ wird die Grenze 169,5; aus $165 \leq Y \leq 185$ wird $164,5 \leq Y_N \leq 185,5$.