

Экспоненциальное убывание — задача 3

M Originale Aufgabenstellung

3.) Wenn ein Raucher heute mit dem Rauchen aufhört, beträgt sein Risiko an Lungenkrebs zu erkranken etwa 40%. Raucht die Person weitere 2 Jahre nicht mehr, so verringert sich dieses Risiko auf 32%.

a) Stellen Sie eine exponentielle Abnahmefunktion auf und geben Sie an, um wieviel % Prozent sich das Krebsrisiko pro Jahr Nichtrauchen verändert.

b) Wie groß ist heute das Risiko für einen ehemaligen Raucher, der vor 25 Jahren mit dem Rauchen aufgehört hat? Nach welchem Zeitraum ist das Risiko auf 1% gesunken? Kann das Risiko nach diesem Modell auf 0% sinken?

M Перевод условия

По условию учебной задачи, если человек сегодня бросает курить, риск развития рака лёгких (**Risiko, an Lungenkrebs zu erkranken**) составляет примерно 40%.

Если он не курит ещё 2 года, риск уменьшается до 32%.

Часть а (Teil a). Нужно составить функцию экспоненциального убывания (**exponentielle Abnahmefunktion**) и найти, на сколько процентов риск уменьшается за каждый год без курения (**Nichtrauchen**).

Часть b (Teil b). Нужно найти риск через 25 лет после отказа от курения, время до достижения уровня 1% и объяснить, может ли модель дать ровно 0%.

Идея решения

Обозначим через t число лет после отказа от курения (**Rauchstopp**), а через $N(t)$ — риск в процентах, $t \geq 0$. Числа относятся к заданной математической модели. В ней каждый год остаётся одна и та же доля a от текущего значения. Поэтому за два года множитель применяется дважды: $40a^2 = 32$. Начнём с этого равенства: оно определяет годовой множитель, который затем можно использовать для любого времени модели.

a) Abnahmefunktion

За два года сохраняется доля $32/40 = 0,8$. Годовой множитель должен при двукратном применении дать эту долю, поэтому берём положительный квадратный корень. Отрицательный корень не подходит для положительного количества в экспоненциальной модели.

E Ansatz und Faktor**Gegeben.**

$$N(0) = 40, \quad N(2) = 32.$$

Ansatz.

$$N(t) = N_0 \cdot a^t.$$

Da $N(0) = 40$ gilt:

$$N(t) = 40 \cdot a^t.$$

Rechnung.

$$40 \cdot a^2 = 32 \quad \Rightarrow \quad a^2 = \frac{32}{40} = 0,8.$$

$$a = \sqrt{0,8} \approx 0,8944.$$

Antwort.

$$N(t) = 40 \cdot \left(\sqrt{0,8}\right)^t$$

In den folgenden Rechnungen bleibt der exakte Faktor gespeichert.

E Prozentänderung pro Jahr**Ansatz.** Der Jahresfaktor ist

$$a \approx 0,8944.$$

Rechnung.

$$1 - a = 1 - \sqrt{0,8} \approx 0,10557.$$

Antwort.

Im Modell sinkt das Risiko jährlich um ca. 10,56%.

E Комментарий

Это не уменьшение на 4 процентных пункта в год (**Prozentpunkte pro Jahr**). Тогда получилась бы последовательность 40%, 36%, 32%, то есть линейное уменьшение. Здесь требуется экспоненциальное убывание.

b) Risiko nach 25 Jahren

E Risiko berechnen

Gegeben. Ein ehemaliger Raucher hat vor 25 Jahren aufgehört. Also gilt:

$$t = 25.$$

Rechnung.

$$N(25) = 40 \cdot \left(\sqrt{0,8}\right)^{25} \approx 2,4586.$$

Antwort.

$$N(25) \approx 2,46\%$$

E Что означает heute?

В части b слово **heute** означает, что сегодня мы рассматриваем человека, который бросил курить 25 лет назад. В модели этому соответствует $t = 25$.

b) Zeitpunkt für 1%

Здесь известен уровень риска, а неизвестно время. Мы измеряем риск в процентах, поэтому 1% записываем как $N(t) = 1$. После деления на 40 логарифмируем обе части: из $a^t = 0,025$ получается $t \ln a = \ln(0,025)$. Так показатель степени становится доступным для обычного деления.

E Gleichung lösen

Ansatz. Gesucht ist t mit

$$N(t) = 1.$$

Rechnung.

$$40 \cdot \left(\sqrt{0,8}\right)^t = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\sqrt{0,8}\right)^t = 0,025.$$

$$t = \frac{\ln(0,025)}{\ln(\sqrt{0,8})} \approx 33,0628.$$

Antwort.

$$t \approx 33,1 \text{ Jahre}$$

Der erste volle Jahreszeitpunkt mit einem Risiko von höchstens 1% wäre $t = 34$, denn $N(33) > 1$ und $N(34) < 1$. Gefragt ist hier der Zeitraum, daher lautet die Antwort 33,1 Jahre.

Grenzverhalten und Antwort

Положительный множитель при любом конечном числе шагов сохраняет положительное значение. При этом значение можно сделать сколь угодно маленьким, выбирая всё большее время. Именно это означает предел 0; он не обещает достижения нуля в какой-то конечный момент.

Kann das Risiko 0% werden?

Ansatz. Für jedes endliche t gilt:

$$\left(\sqrt{0,8}\right)^t > 0.$$

Rechnung.

$$N(t) = 40 \cdot \left(\sqrt{0,8}\right)^t > 0.$$

Aber:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 40 \cdot \left(\sqrt{0,8}\right)^t = 0.$$

Antwort.

Nach diesem Modell nähert sich das Risiko 0% nur an.

Es erreicht 0% aber nie genau.

Typische Fehler

- Lineare Abnahme rechnen: 40%, 36%, 32%.
- Prozent und Prozentpunkte verwechseln.
- Bei 0% schreiben, dass der Wert irgendwann exakt erreicht wird.