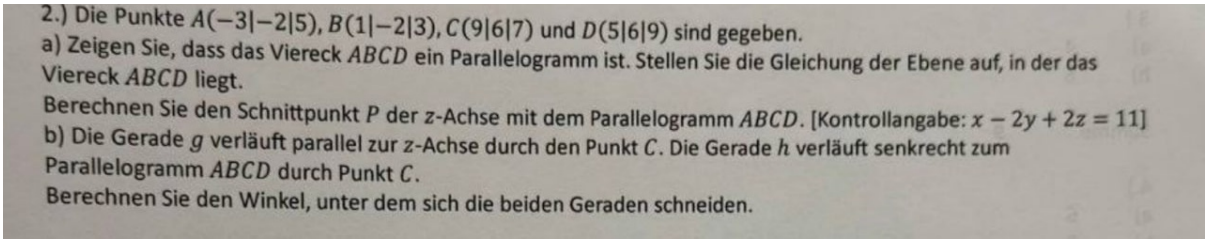
Parallelogramm im Raum — Aufgabe 2

Originale Aufgabenstellung


2.) Die Punkte $A(-3|-2|5)$, $B(1|-2|3)$, $C(9|6|7)$ und $D(5|6|9)$ sind gegeben.
a) Zeigen Sie, dass das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist. Stellen Sie die Gleichung der Ebene auf, in der das Viereck $ABCD$ liegt.
Berechnen Sie den Schnittpunkt P der z-Achse mit dem Parallelogramm $ABCD$. [Kontrollangabe: $x - 2y + 2z = 11$]
b) Die Gerade g verläuft parallel zur z-Achse durch den Punkt C. Die Gerade h verläuft senkrecht zum Parallelogramm $ABCD$ durch Punkt C.
Berechnen Sie den Winkel, unter dem sich die beiden Geraden schneiden.

Перевод условия

Даны четыре точки в пространстве:

$$A(-3|-2|5), \quad B(1|-2|3), \quad C(9|6|7), \quad D(5|6|9).$$

Часть a (Teil a). Нужно показать, что $ABCD$ — параллелограмм (**Parallelogramm**), составить уравнение плоскости (**Ebenengleichung**) и найти точку пересечения P (**Schnittpunkt**) параллелограмма с осью z (**z-Achse**).
Часть b (Teil b). Прямая g проходит через C параллельно оси z. Прямая h проходит через C перпендикулярно параллелограмму. Нужно найти острый угол пересечения (**Schnittwinkel**) этих прямых.

Идея решения

По координатам четырёх точек пока не видно, образуют ли они параллелограмм. Проверим перемещения вдоль противоположных сторон: если $\vec{AB} = \vec{DC}$ и $\vec{AD} = \vec{BC}$, эти стороны попарно равны и параллельны. Начнём с вычитания координат. Полученные направления затем пригодятся для записи плоскости, так что первое вычисление не придётся делать заново.

a) Parallelogramm und Ebene

E Parallelogramm zeigen

Gegeben.

$$A(-3|-2|5), \quad B(1|-2|3), \quad C(9|6|7), \quad D(5|6|9).$$

Rechnung.

$$\vec{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{DC} = C - D = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{AD} = D - A = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{BC} = C - B = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Antwort.

$$\boxed{\vec{AB} = \vec{DC} \text{ und } \vec{AD} = \vec{BC}}$$

Für ein nicht entartetes Parallelogramm müssen die benachbarten Seiten außerdem linear unabhängig sein. Das bestätigt das folgende Kreuzprodukt.

E Ebene aufstellen

Чтобы записать плоскость, найдём вектор, перпендикулярный обоим направлениям её сторон. Такой вектор называется нормалью. Векторное произведение даёт подходящую нормаль; её ненулевая длина заодно подтверждает, что стороны не лежат на одной прямой. Деление нормали на 16 меняет длину, но сохраняет перпендикулярность, поэтому уравнение плоскости можно упростить.
Ansatz. Ein Normalvektor entsteht aus dem Kreuzprodukt zweier unabhängiger Richtungsvektoren der Ebene:

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -32 \\ 32 \end{pmatrix} = 16 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Den Faktor 16 dürfen wir kürzen. Damit wählen wir

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Das Kreuzprodukt ist nicht der Nullvektor: Die vier Punkte bilden ein nicht entartetes Parallelogramm und bestimmen genau eine Ebene. Kontrolle:

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 0 + 2 \cdot (-2) = 0,$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AD} = 1 \cdot 8 + (-2) \cdot 8 + 2 \cdot 4 = 0.$$

Rechnung. Damit hat die Ebene die Form

$$E:\ x-2y+2z=d.$$

Punkt $A(-3|-2|5)$ einsetzen:

$$d=-3-2\cdot(-2)+2\cdot 5=11.$$

Antwort.

$$\boxed{E:\ x-2y+2z=11}$$

Die Kontrollangabe stimmt.

a) Schnittpunkt mit der z-Achse

E Schnittpunkt berechnen

Ansatz. Auf der z-Achse gilt:

$$x=0,\qquad y=0.$$

Rechnung. In die Ebene einsetzen:

$$0-2\cdot 0+2z=11\qquad\Rightarrow\qquad z=\frac{11}{2}.$$

Antwort.

$$\boxed{P\left(0|0|\frac{11}{2}\right)}$$

E Prüfen: liegt P im Parallelogramm?

Найденная плоскость бесконечна, а параллелограмм занимает только её часть. От вершины A можно пройти долю s стороны AB и долю t стороны AD. Чтобы остаться в фигуре, каждая доля должна лежать от 0 до 1. Найдём эти доли для точки P.

Ansatz. Punkte im Parallelogramm haben die Form

$$A+s\vec{AB}+t\vec{AD},\qquad 0\le s\le 1,\quad 0\le t\le 1.$$

Rechnung.

$$\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{11}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-2\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}8\\8\\4\end{pmatrix}.$$

$$-2+8t=0 \Rightarrow t=\frac{1}{4},$$
$$-3+4s+8t=0 \Rightarrow s=\frac{1}{4}.$$

Auch die dritte Koordinate stimmt:

$$5-2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{4}=\frac{11}{2}.$$

Antwort. Da $s=\frac{1}{4}$ und $t=\frac{1}{4}$ beide zwischen 0 und 1 liegen:

$$\boxed{P \text{ liegt im Parallelogramm.}}$$

E Почему проверка нужна

Параметры s,t задают доли двух сторон. При $0 \le s,t \le 1$ точка принадлежит параллелограмму, включая границу. Строго внутри она при $0<s,t<1$; значение 0 или 1 у любого параметра указывает на сторону фигуры.

b) Winkel zwischen g und h

E Richtungsvektoren

Gegeben. g ist parallel zur z-Achse:

$$\vec{v}_g=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

h ist senkrecht zum Parallelogramm. Deshalb nimmt man den Normalvektor der Ebene:

$$\vec{v}_h=\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}.$$

Beide Geraden gehen durch $C(9|6|7)$:

$$g:\ X=C+r(0|0|1), \qquad h:\ X=C+q(1|-2|2), \quad r,q\in\mathbb{R}.$$

E Schnittwinkel berechnen

Угол между прямыми определяется их направлениями. Для векторов $u \cdot v = |u|\,|v| \cos\varphi$. У прямой можно выбрать противоположный направляющий вектор, поэтому нам подходит меньший из двух смежных углов. Модуль скалярного произведения даёт неотрицательный косинус именно этого угла. После деления на длины применим arccos в режиме DEG.

Ansatz. Der kleinere Schnittwinkel entsteht aus dem Betrag des Skalarprodukts:

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{v}_g \cdot \vec{v}_h|}{|\vec{v}_g| \cdot |\vec{v}_h|}.$$

Rechnung.

$$\vec{v}_g \cdot \vec{v}_h = 2, \qquad |\vec{v}_g| = 1, \qquad |\vec{v}_h| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3.$$

$$\cos(\varphi) = \frac{2}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) \approx 48{,}19^\circ.$$

Antwort.

$$\boxed{\varphi \approx 48{,}2^\circ}$$

Kontrolle: Für die Figur muss $s, t \in [0;1]$ gelten. Für h nimmt man die Normale. Der Betrag im Skalarprodukt liefert den kleineren Winkel.