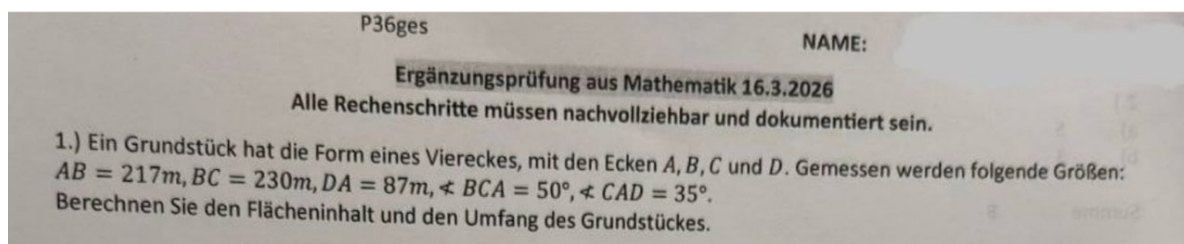


EPM März 2026 — Aufgabe 1

M Originale Aufgabenstellung



M Перевод условия

Grundstück означает земельный участок. Он имеет форму четырёхугольника $ABCD$. Даны стороны

$$AB = 217 \text{ m}, \quad BC = 230 \text{ m}, \quad DA = 87 \text{ m}$$

и углы

$$\angle BCA = 50^\circ, \quad \angle CAD = 35^\circ.$$

Нужно найти площадь (**Flächeninhalt**) и периметр (**Umfang**) участка.

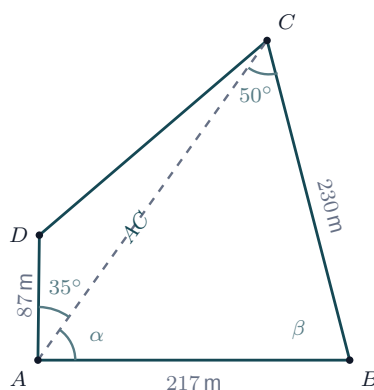
Идея решения

Для периметра не хватает стороны CD . Проведём диагональ AC : тогда вместо одного четырёхугольника получатся треугольники ABC и ACD . В первом уже достаточно данных, чтобы найти углы и длину AC . Эта длина станет известной стороной второго треугольника и поможет вычислить CD .

Диагональ служит вспомогательной линией (**Hilfslinie**). Она проходит внутри выбранного участка и не входит в его внешний периметр (**Umfang**). Перед вычислениями нужно уточнить, какую фигуру позволяют восстановить данные.

Допущение. На фото условия нет схемы (**Skizze**) и не сказано, что четырёхугольник (**Viereck**) выпуклый (**konvex**). Поэтому данные не определяют единственную фигуру. Ниже сначала решаем **выпуклую** конфигурацию, показанную на нашей схеме, а в конце перечисляем другие допустимые ветви.

Схема принятой ниже выпуклой конфигурации



1. Winkel und Diagonale AC

Сторона AB лежит напротив известного угла 50° , а BC — напротив искомого угла α . Это две пары для теоремы синусов. Калькулятор вернёт один угол через $\arcsin$, но такой же синус имеет $180^\circ - \alpha$: проверим, остаётся ли в каждом случае место для третьего угла. Индекс i в AC_i ниже обозначает одну из этих двух конфигураций.

Dreieck ABC

Gegeben sind

$$AB = 217 \text{ m}, \quad BC = 230 \text{ m}, \quad \angle BCA = 50^\circ.$$

Gesucht sind zuerst

$$\alpha = \angle BAC, \quad \beta = \angle ABC, \quad AC.$$

Mit dem Sinussatz:

$$\frac{AB}{\sin(\angle BCA)} = \frac{BC}{\sin(\alpha)}.$$

$$\frac{217}{\sin(50^\circ)} = \frac{230}{\sin(\alpha)}.$$

$$\sin(\alpha) = \frac{230 \cdot \sin(50^\circ)}{217} \approx 0,8119365.$$

Der Sinussatz liefert hier zwei Winkel:

$$\alpha_1 = \arcsin\left(\frac{230 \sin 50^\circ}{217}\right) \approx 54,2856^\circ,$$

$$\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1 \approx 125,7144^\circ.$$

Zu beiden Winkeln gehört ein positiver dritter Winkel:

$$\beta_1 = 180^\circ - 50^\circ - \alpha_1 \approx 75,7144^\circ,$$

$$\beta_2 = 180^\circ - 50^\circ - \alpha_2 \approx 4,2856^\circ.$$

Noch einmal Sinussatz:

$$\frac{AC_i}{\sin(\beta_i)} = \frac{217}{\sin(50^\circ)}.$$

$$AC_1 = \frac{217 \cdot \sin(\beta_1)}{\sin(50^\circ)} \approx 274,51398 \text{ m},$$

$$AC_2 = \frac{217 \cdot \sin(\beta_2)}{\sin(50^\circ)} \approx 21,16832 \text{ m}.$$

Für die angenommene konvexe Skizze wählen wir den ersten Ast α_1, β_1, AC_1 . Die zweite Lösung darf ohne diese Annahme nicht gestrichen werden. Alle weiteren Rechnungen verwenden die ungerundeten Taschenrechnerwerte.

Проверка калькулятора. Работаем в режиме **DEG**; иначе тригонометрические значения будут неверными.

E Ergebnis

$$\alpha_1 \approx 54,29^\circ, \quad \beta_1 \approx 75,71^\circ, \quad AC_1 \approx 274,51 \text{ m}.$$

2. Fehlende Seite CD

Теперь в треугольнике ACD известны две стороны и угол 35° между ними. Это данные для теоремы косинусов. Она даёт квадрат CD ; берём положительный корень, поскольку ищем длину стороны.

Dreieck ACD

Jetzt betrachten wir das zweite Dreieck. Bekannt sind

$$AC_1 \approx 274,51398 \text{ m}, \quad AD = 87 \text{ m}, \quad \angle CAD = 35^\circ.$$

Gesucht ist die Randseite CD .

Mit dem Cosinussatz:

$$CD_1^2 = AC_1^2 + AD^2 - 2 \cdot AC_1 \cdot AD \cdot \cos(35^\circ).$$

$$CD_1 \approx 209,28395 \text{ m}.$$

Die Seite CD gehört zum Rand des Grundstücks. Ohne CD lässt sich der Umfang nicht vollständig berechnen; AC bleibt eine Hilfslinie.

E Ergebnis

$$CD_1 \approx 209,28 \text{ m}$$

3. Flächeninhalt

Для площади треугольника достаточно двух сторон и угла между ними: в формуле $A = ab \sin \gamma / 2$ множитель $b \sin \gamma$ является высотой к стороне a . У ABC берём стороны AB , BC , поэтому нужен угол β_1 при B . У ACD берём AC_1 , AD и угол при A . В выбранной выпуклой фигуре два треугольника не перекрываются, их площади складываются.

Zwei Dreiecke addieren

$$A_{\text{Grundstück}} = A_{ABC} + A_{ACD}.$$

Für $\triangle ABC$ verwenden wir zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel β_1 :

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin(\beta_1).$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 217 \cdot 230 \cdot \sin(\beta_1) \approx 24\,183,34 \text{ m}^2.$$

Für $\triangle ACD$ verwenden wir AC_1 , AD und den eingeschlossenen Winkel 35° :

$$A_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot AC_1 \cdot AD \cdot \sin(35^\circ).$$

$$A_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot AC_1 \cdot 87 \cdot \sin(35^\circ) \approx 6\,849,28 \text{ m}^2.$$

$$A_{\text{Grundstück}} \approx 24\,183,34 + 6\,849,28 = 31\,032,62 \text{ m}^2.$$

4. Umfang und Antwort

Der Umfang ist der äußere Rand:

$$U = AB + BC + CD + DA.$$

$$U \approx 217 + 230 + CD_1 + 87 = 743,28 \text{ m}.$$

Mehrdeutigkeit der Originalangabe

Одни длины и углы не указывают, по какую сторону от диагонали лежат B и D . Поэтому смена ветви синуса — не единственный возможный выбор. Ниже перечислены все простые четырёхугольники с исходными данными; у вогнутой фигуры площадь может получаться разностью, если один из треугольников покрывает другой.

Ohne die Annahme *konvex wie in unserer Skizze* entstehen mehrere einfache Vierecke. Die verschiedenen Lagen liefern:

- α_1 und B, D auf verschiedenen Seiten von AC (konvex, oben gerechnet):

$$A \approx 31\,032,62 \text{ m}^2, \quad U \approx 743,28 \text{ m}.$$

- α_1 und B, D auf derselben Seite von AC (konkav):

$$A \approx 24\,183,34 - 6\,849,28 = 17\,334,06 \text{ m}^2, \quad U \approx 743,28 \text{ m}.$$

- α_2 und B, D auf verschiedenen Seiten von AC (konkav):

$$AC_2 \approx 21,17 \text{ m}, \quad CD_2 \approx 70,71 \text{ m},$$

$$A \approx 2\,392,99 \text{ m}^2, \quad U \approx 604,71 \text{ m}.$$

Die vierte Kombination mit α_2 erzeugt bei der vorgegebenen Reihenfolge $A - B - C - D$ ein sich selbst schneidendes Viereck und ist kein einfaches Grundstück. Damit ist klar: Erst die zusätzliche Konvexitätsannahme macht die erwartete Antwort eindeutig.

A Antwort wie in der Klausur

Unter der Annahme, dass $ABCD$ wie in der Skizze konvex ist, beträgt der Flächeninhalt ungefähr

$$A \approx 31\,033 \text{ m}^2.$$

Der Umfang des Grundstückes beträgt ungefähr

$$U \approx 743,3 \text{ m}.$$

! Typische Fehler

- Aus $\sin(\alpha) = 0,8119365$ nur den ersten Winkel notieren und die zweite Sinussatz-Lösung ohne Skizze oder Konvexitätsannahme verwerfen.
- AC zum Umfang addieren. Das ist falsch, weil AC keine Außenseite ist.
- Bei der Fläche von $\triangle ABC$ den Winkel 50° statt β_1 verwenden.
- Zu früh runden. Am besten mit gespeicherten Taschenrechnerwerten weiterrechnen.