

EPM Aufgabe — Funktionenschar und Rotation

M Originale Aufgabenstellung

5.) Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen h_a mit $h_a(x) = (x - 3)^a + 1$.
 a) Es gilt $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$: Geben Sie das Verhalten von h_a für $x \rightarrow -\infty$ für gerade und für ungerade Werte von a an.
 b) Es gilt $a = -1$: Der Graph von h_{-1} schließt in $x \in [0; 2]$ mit der x- und y-Achse ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie das Volumen, wenn man dieses Flächenstück um die y-Achse rotieren lässt.

M Перевод условия

Дано семейство функций

$$h_a(x) = (x - 3)^a + 1.$$

Часть а (Teil a). Для натуральных $a \neq 0$ нужно описать поведение $h_a(x)$ при $x \rightarrow -\infty$ отдельно для чётных (**gerade**) и нечётных (**ungerade**) значений a .

Часть b (Teil b). Для $a = -1$ график вместе с осями x (**x-Achse**) и y (**y-Achse**) ограничивает конечную область при $x \in [0; 2]$. Нужно найти объём тела, полученного вращением этой области вокруг оси y .

Идея решения

Сначала посмотрим, что происходит с основанием $x - 3$, когда x уходит влево без ограничения. Оно отрицательно и растёт по модулю. Возведение в положительную целую степень сохранит или изменит знак в зависимости от чётности показателя. Поэтому в пункте а разделяем чётные и нечётные a ; прибавление единицы не меняет полученное бесконечное поведение. Отдельный выбор $a = -1$ относится уже к пункту b и будет подставлен там перед вычислением объёма.

a) Verhalten für $x \rightarrow -\infty$

E Gerade und ungerade Exponenten

Gegeben.

$$h_a(x) = (x - 3)^a + 1, \quad a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Ansatz. Für $x \rightarrow -\infty$ gilt:

$$x - 3 \rightarrow -\infty.$$

Jetzt entscheidet die Parität von a .

Rechnung. Wenn a gerade ist:

$$(x - 3)^a \rightarrow +\infty \quad \Rightarrow \quad h_a(x) \rightarrow +\infty.$$

Wenn a ungerade ist:

$$(x - 3)^a \rightarrow -\infty \quad \Rightarrow \quad h_a(x) \rightarrow -\infty.$$

Antwort.

$$\begin{array}{ll} a \text{ gerade :} & h_a(x) \rightarrow +\infty, \\ a \text{ ungerade :} & h_a(x) \rightarrow -\infty. \end{array}$$

Комментарий

Константа $+1$ не меняет поведение на бесконечности (**Verhalten im Unendlichen**): степенной член, неограниченный по модулю, всё равно определяет результат.

b) Funktion für $a = -1$ **Spezialfall einsetzen****Gegeben.**

$$a = -1, \quad x \in [0; 2].$$

Rechnung.

$$h_{-1}(x) = (x - 3)^{-1} + 1 = \frac{1}{x - 3} + 1.$$

Die Definitionsmenge ist $\mathbb{R} \setminus \{3\}$; das Intervall $[0; 2]$ ist zulässig.

$$h_{-1}(0) = \frac{1}{-3} + 1 = \frac{2}{3}, \quad h_{-1}(2) = \frac{1}{-1} + 1 = 0.$$

Da $h'_{-1}(x) = -1/(x - 3)^2 < 0$ gilt, ist die Funktion auf $[0; 2]$ streng fallend und dort umkehrbar. Jeder horizontale Schnitt verläuft von $x = 0$ bis $x(y) \geq 0$.

Antwort. Das Flächenstück liegt zwischen

$$x = 0, \quad y = 0, \quad y = h_{-1}(x).$$

Выбранный метод: диски

На высоте y область тянется от оси до графика на расстояние $x(y)$. При вращении этот отрезок заполняет диск радиуса $x(y)$ без отверстия. Поэтому для метода дисков (**Kreisscheibenmethode**) нужно выразить x через y , а затем складывать слои от высоты 0 до высоты $2/3$.

Umkehrung und Grenzen

Из $y - 1 = 1/(x - 3)$ берём обратные величины обеих частей. На нашей области $x \neq 3$ и $y \leq 2/3 < 1$, поэтому знаменатели не обращаются в ноль. После этого прибавляем 3 и получаем радиус как функцию высоты.

E Nach x auflösen

Ansatz. Wir lösen die Gleichung nach x auf:

$$y = \frac{1}{x - 3} + 1.$$

Rechnung.

$$y - 1 = \frac{1}{x - 3} \quad \Rightarrow \quad x - 3 = \frac{1}{y - 1}.$$

$$x = \frac{1}{y - 1} + 3.$$

Der Radius ist also

$$r(y) = x(y) = \frac{1}{y - 1} + 3.$$

Antwort. Die y -Grenzen kommen aus den Randwerten:

$$y \in \left[0, \frac{2}{3}\right].$$

E Kontrolle

Die Grenzen passen:

$$x(0) = 2, \quad x\left(\frac{2}{3}\right) = 0.$$

Volumen um die y -Achse

E Integral aufstellen

Ansatz. Bei Rotation um die y -Achse:

$$V = \pi \int_{y_1}^{y_2} r(y)^2 dy.$$

Rechnung.

$$V = \pi \int_0^{2/3} \left(\frac{1}{y - 1} + 3 \right)^2 dy.$$

$$\left(\frac{1}{y-1} + 3\right)^2 = \frac{1}{(y-1)^2} + \frac{6}{y-1} + 9.$$

$$V = \pi \int_0^{2/3} \left(\frac{1}{(y-1)^2} + \frac{6}{y-1} + 9\right) dy.$$

После раскрытия квадрата интегрируем три слагаемых отдельно. У $(y-1)^{-2}$ первообразная равна $-(y-1)^{-1}$, а у $1/(y-1)$ — $\ln|y-1|$. Модуль нужен, поскольку здесь $y-1 < 0$. В конце вычтем значение первообразной на нижней границе из значения на верхней.

Integral berechnen

Rechnung. Eine Stammfunktion ist

$$F(y) = -\frac{1}{y-1} + 6 \ln|y-1| + 9y.$$

$$F\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{-\frac{1}{3}} + 6 \ln\left(\frac{1}{3}\right) + 9 \cdot \frac{2}{3} = 9 - 6 \ln 3.$$

$$F(0) = -\frac{1}{-1} + 6 \ln(1) + 0 = 1.$$

$$\int_0^{2/3} \left(\frac{1}{y-1} + 3\right)^2 dy = 9 - 6 \ln 3 - 1 = 8 - 6 \ln 3.$$

$$V = \pi(8 - 6 \ln 3).$$

Antwort.

$$V = 8\pi - 6\pi \ln 3 \approx 4,42 \text{ VE}$$

Typische Fehler

- Gerade und ungerade Exponenten bei $x \rightarrow -\infty$ nicht trennen.
- Für Rotation um die y -Achse fälschlich $\pi \int f(x)^2 dx$ verwenden.
- Die Grenzen 0 und 2 als y -Grenzen nehmen. Richtig ist $y \in [0, \frac{2}{3}]$.