EPM Aufgabe — Cosinusfunktion und Fläche

Originale Aufgabenstellung

Gegeben ist die Funktion

$$f_a(x) = 1 - a \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right), \qquad a \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie a so, dass der Graph von f an der Stelle $x = \frac{\pi}{3}$ die Steigung $\frac{1}{4}$ besitzt.
b) Berechnen Sie die Extrempunkte von

$$f(x) = 1 - \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

im Intervall $(-\pi; 3\pi)$; die Art der Extrempunkte ist auch anzugeben.
c) Die Gerade

$$g(x) = \frac{x}{\pi}$$

schneidet f aus b) an den drei Stellen 0, π und 2π. Berechnen Sie den Inhalt jener Fläche, die von f und g im Intervall $[0; 2\pi]$ begrenzt wird.

Перевод условия

В пункте a нужно выбрать a так, чтобы при $x = \pi/3$ график имел наклон $1/4$ (**Steigung**).

В пункте b для $f(x) = 1 - \cos(x/2)$ требуется найти точки экстремума (**Extrempunkte**) на открытом интервале $(-\pi; 3\pi)$ и указать их вид.

В пункте c дана прямая $g(x) = x/\pi$ и три пересечения: 0, π, 2π. Нужно найти суммарную площадь между графиками на $[0; 2\pi]$.

Идея решения

В пункте a известно, как наклонён график при $x = \pi/3$. Производная в этой точке должна равняться заданному наклону $1/4$. Поэтому сначала найдём $f_a'(x)$, сохраняя a как постоянное число, и только затем подставим $x = \pi/3$. Получится уравнение для a. Аргументы здесь заданы в радианах (**Bogenmaß**); на калькуляторе используем RAD.

a) Parameter über die Steigung

Производная косинуса даёт минус, который сокращается с минусом перед a. Внутренний аргумент $x/2$ даёт ещё множитель $1/2$ по правилу цепочки. Поэтому результат равен $(a/2)\sin(x/2)$.

E Ableitung und Bedingung

Gegeben.

$$f_a(x) = 1 - a\cos\left(\frac{x}{2}\right), \qquad x_0 = \frac{\pi}{3}, \qquad k = \frac{1}{4}.$$

Ansatz.

$$f_a'(x_0) = k.$$

Rechnung.

$$f_a'(x) = \frac{a}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

$$f_a'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{a}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{a}{4}.$$

$$\frac{a}{4} = \frac{1}{4} \qquad \Rightarrow \qquad a = 1.$$

Antwort.

$$\boxed{a = 1}$$

E Комментарий

Внутренняя функция $x/2$ имеет производную $1/2$. Этот множитель появляется по правилу цепочки; аргумент синуса остаётся $x/2$. Поэтому при $x = \pi/3$ вычисляем $\sin(\pi/6)$, а не $\sin(\pi/3)$.

b) Extrempunkte

Параметр уже найден, теперь исследуем обычную функцию. Синус равен нулю при аргументах $k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$. В нашем случае аргумент равен $x/2$, поэтому абсциссы имеют вид $2k\pi$. Из них в заданном интервале лежат только 0 и 2π. Здесь буква k нумерует целые периоды; наклон из пункта a уже не используется.

E Kritische Stellen

Gegeben.

$$f(x) = 1 - \cos\left(\frac{x}{2}\right), \qquad x \in (-\pi; 3\pi).$$

Ansatz. Die Funktion ist auf dem offenen Intervall differenzierbar; an inneren Extremstellen gilt daher

$$f'(x) = 0.$$

Die ausgeschlossenen Randpunkte werden nicht als Extrempunkte mitgezählt.

Rechnung.

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

$$\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x}{2} = k\pi \qquad \Rightarrow \qquad x = 2k\pi.$$

Im Intervall $(-\pi; 3\pi)$ liegen:

$$x = 0, \qquad x = 2\pi.$$

E Art und Punkte

Ansatz. Zur Art der Extrempunkte verwenden wir die zweite Ableitung:

$$f''(x) = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

Rechnung. Für $x = 0$:

$$f''(0) = \frac{1}{4} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Tiefpunkt.}$$

$$f(0) = 1 - \cos(0) = 0.$$

Für $x = 2\pi$:

$$f''(2\pi) = \frac{1}{4}\cos(\pi) = -\frac{1}{4} < 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Hochpunkt.}$$

$$f(2\pi) = 1 - \cos(\pi) = 2.$$

Antwort.

$$\boxed{T(0|0), \qquad H(2\pi|2)}$$

c) Fläche zwischen f und g

На первом промежутке выше прямая, на втором — кривая. Проверим это одной подстановкой внутри каждого промежутка и запишем положительные высоты полосок. Для вычисления достаточно одной первообразной разности $f - g$; на первом участке её интеграл будет отрицательным, поэтому берём модуль.

E Fläche aufteilen

Gegeben.

$$f(x) = 1 - \cos\left(\frac{x}{2}\right), \qquad g(x) = \frac{x}{\pi}.$$

Die Schnittstellen sind

$$x = 0, \qquad x = \pi, \qquad x = 2\pi.$$

Ansatz. Die Differenz $f - g$ ist stetig, und laut Angabe gibt es nur die drei Schnittstellen 0, π und 2π. Ein Testwert pro Teilintervall genügt:

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} > 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{3}{2} = g\left(\frac{3\pi}{2}\right).$$

Also liegt auf $[0, \pi]$ die Gerade g über f und auf $[\pi, 2\pi]$ der Graph von f über g.

$$A = \int_0^{\pi} (g(x) - f(x))\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} (f(x) - g(x))\,dx.$$

При интегрировании $\cos(x/2)$ возникает $2\sin(x/2)$: его производная равна $2 \cdot \frac{1}{2}\cos(x/2) = \cos(x/2)$. Постоянную $1/\pi$ в последнем слагаемом выносим за знак интеграла.

E Rechnung

Rechnung.

$$f(x) - g(x) = 1 - \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{\pi}.$$

Eine Stammfunktion ist

$$F(x) = x - 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{2\pi}.$$

$$F(\pi) = \pi - 2 - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 2, \qquad F(0) = 0.$$

$$A_1 = |F(\pi) - F(0)| = \left|\frac{\pi}{2} - 2\right| = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

$$F(2\pi) = 2\pi - 0 - \frac{4\pi^2}{2\pi} = 0.$$

$$A_2 = F(2\pi) - F(\pi) = 0 - \left(\frac{\pi}{2} - 2\right) = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

$$A = A_1 + A_2 = 4 - \pi.$$

Antwort.

$$\boxed{A = 4 - \pi \approx 0{,}858 \text{ FE}}$$

E Комментарий

На участке, где порядок графиков не меняется, отрицательный интеграл можно исправить модулем (**Betrag**) или поменять порядок функций. Если порядок меняется, сначала разбиваем область: модуль общего интеграла не возвращает взаимно уничтожившиеся площади.

! Typische Fehler

- Bei a) $\sin(\frac{\pi}{3})$ statt $\sin(\frac{\pi}{6})$ einsetzen.
- Extremstellen nennen, aber die y-Koordinaten nicht mit $f(x)$ berechnen.
- Die Fläche mit einem einzigen Integral von 0 bis 2π rechnen und die Vorzeichenaufhebung übersehen.