

Extremwertaufgaben

Оптимизация через модель одной переменной

У прямоугольника периметр 20. Можно сделать его узким и длинным, а можно приблизить к квадрату. Периметр сохранится, но площадь изменится. Какие стороны дадут самую большую площадь?

Прежде чем искать максимум, разберёмся, что именно мы можем менять. Если одна сторона уже выбрана, вторая определяется периметром. Эта связь позволит выразить площадь через одну переменную, и вопрос о фигуре станет вопросом о функции.

Площадь через одну сторону

Назовём стороны прямоугольника a и b . Его площадь равна $A = ab$. Условие о периметре даёт $2a + 2b = 20$, то есть $b = 10 - a$. Подставим эту связь в площадь:

$$A(a) = a(10 - a), \quad 0 < a < 10.$$

Ограничение на a появилось из рисунка: обе стороны должны быть положительными. Теперь, выбирая a , мы одновременно определяем вторую сторону и площадь. В немецком решении формулу оптимизируемой величины называют **Hauptbedingung**, связь между сторонами — **Nebenbedingung**, а полученную функцию одной переменной — **Zielfunktion**.

Если при увеличении a площадь растёт, её производная положительна; если падает — отрицательна. Внутренний максимум можно искать там, где рост сменяется убыванием. У гладкой функции в такой точке производная равна нулю. Это пока кандидат: затем проверим, что он даёт самую большую площадь на всём допустимом промежутке.

1 Какие стороны дают наибольшую площадь

Продолжим с полученной площадью. Раскроем скобки, чтобы удобнее взять производную:

$$A(a) = a(10 - a) = 10a - a^2, \quad 0 < a < 10.$$

Найдём, где площадь перестаёт расти:

$$A'(a) = 10 - 2a.$$

$$A'(a) = 0 \Rightarrow 10 - 2a = 0 \Rightarrow a = 5.$$

Периметр теперь определяет вторую сторону:

$$b = 10 - 5 = 5.$$

Проверим, что найденный квадрат даёт максимум:

$$A''(a) = -2 < 0 \Rightarrow \text{Maximum}.$$

До $a = 5$ производная положительна, после $a = 5$ — отрицательна: площадь сначала растёт, затем убывает. Ещё одна проверка получается из $A(a) = 25 - (a - 5)^2 \leq 25$, причём равенство возможно только при $a = 5$. Это глобальный максимум: стороны $a = b = 5$ LE, площадь $A_{\max} = 25$ FE.

! Частая ошибка

Нельзя оставить ответ только как $a = 5$. В задаче спрашивают стороны прямоугольника, значит нужен полный ответ: $a = 5$ и $b = 5$.

Е Локальный тест и глобальный ответ

Локальный максимум означает «не меньше, чем у соседних допустимых значений»; глобальный — «не меньше, чем у любого допустимого значения». $Z'(x_0) = 0$ вместе с $Z''(x_0) < 0$ или > 0 доказывает локальный максимум или минимум. Чтобы утверждать, что найдено глобальное наибольшее или наименьшее значение на допустимом промежутке, сравни все внутренние кандидаты, допустимые точки, где производная не существует, и включённые граничные значения. Иногда глобальность сразу следует из строгой выпуклости или вогнутости на всём промежутке.

У открытого конца промежутка исследуй предел, но не включай сам конец в ответ. Например, $Z(x) = x$ на $(0, 1)$ не достигает ни минимума, ни максимума: 0 и 1 — только инфимум и супремум. Непрерывная функция на закрытом ограниченном отрезке, напротив, обязательно достигает обоих глобальных экстремумов.

✓ Остановка 1: от периметра к функции

У нового прямоугольника периметр 24 LE. Вырази вторую сторону через первую a , запиши площадь как функцию от a и допустимый интервал. Найди обе стороны и докажи глобальность максимума. Ключи к остановкам находятся после основных ответов.

2 Модель под графиком

Прямоугольник под графиком

Типовая модель: прямоугольник стоит на оси x , верхние углы лежат на графике, а ось симметрии проходит через $x = 2$.

Для параболы

$$f(x) = 4x - x^2$$

ось симметрии $x = 2$ видна из записи $f(x) = 4 - (x - 2)^2$. Если левая вершина имеет координату $x < 2$, она отстоит от оси на $2 - x$. Правая находится на таком же расстоянии справа: $2 + (2 - x) = 4 - x$. Высоты обеих вершин равны $f(x)$. Поэтому

$$a = (4 - x) - x = 4 - 2x, \quad b = f(x) = 4x - x^2.$$

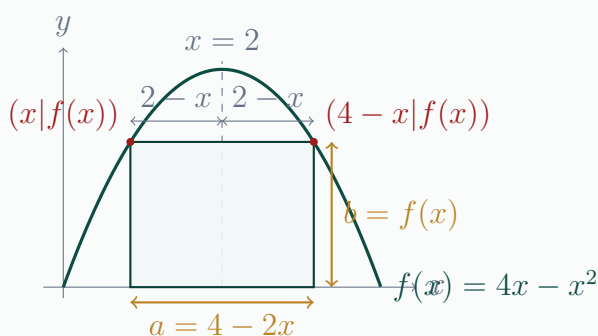
Hauptbedingung:

$$A = a \cdot b.$$

Zielfunktion:

$$A(x) = (4 - 2x)(4x - x^2), \quad 0 < x < 2.$$

v Как выглядит модель



3 Мини-пример под графиком

✓ Остановка 2: проверь геометрию

Не заглядывая в вычисления ниже, возьми левую координату $x = 1$ в модели под $f(x) = 4x - x^2$. Найди правую координату, ширину, высоту и площадь. Какое из чисел обозначает половину ширины? Почему x нельзя автоматически считать полной шириной прямоугольника?

Максимальная площадь

Для построенного прямоугольника под параболой:

$$A(x) = (4 - 2x)(4x - x^2) = 2x^3 - 12x^2 + 16x, \quad 0 < x < 2.$$

Производная:

$$A'(x) = 6x^2 - 24x + 16.$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 8 = 0.$$

$$x = 2 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

По формуле корней здесь $x = (12 \pm \sqrt{144 - 96})/6$. Корень со знаком плюс лежит правее 2, но x обозначает левую вершину. Из Definitionsbereich $0 < x < 2$ подходит только

$$x = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Вторая производная:

$$A''(x) = 12x - 24.$$

$$A''\left(2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) < 0 \Rightarrow \text{Maximum}.$$

Стороны:

$$a = 4 - 2x = \frac{4\sqrt{3}}{3}, \quad b = f(x) = \frac{8}{3}.$$

Максимальная площадь получается при

$$a = \frac{4\sqrt{3}}{3}, \quad b = \frac{8}{3}.$$

На всём $(0, 2)$ имеем $A''(x) < 0$, поэтому найденный максимум глобальный. Его значение: $A_{\max} = \frac{32\sqrt{3}}{9}$ FE.

Е Что проверяет ЕРМ

Здесь важно не просто взять производную, а правильно перевести геометрию:

$$\text{ширина} = (4 - x) - x, \quad \text{высота} = f(x).$$

4 Треугольник под графиком

Как составить модель

Треугольник лежит над осью x : его основание равно u , а высота — $f(u) > 0$. Поэтому площадь равна $\frac{1}{2}uf(u)$. Ограничения $u > 0$ и $f(u) > 0$ задают допустимый промежуток. Для $f(u) = -u^2/6 + 4,5$ второе условие даёт $u^2 < 27$, поэтому $0 < u < 3\sqrt{3}$. После дифференцирования уравнение $A'(u) = 0$ даёт $u = \pm 3$, но отрицательный корень не подходит для длины основания.

Е Dreieck unter dem Graphen

Gegeben.

$$f(x) = -\frac{x^2}{6} + 4,5, \quad A(0|0), \quad B(u|0), \quad C(u|f(u)), \quad u > 0, \quad f(u) > 0.$$

Gesucht.

u so, dass $A_{\triangle ABC}$ maximal wird, und C .

Ansatz.

$$\text{Hauptbedingung: } A_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h.$$

$$\text{Nebenbedingung: } AB = u, \quad h = f(u) = -\frac{u^2}{6} + 4,5.$$

Rechnung.

$$\begin{aligned} \text{Zielfunktion: } A(u) &= \frac{1}{2}u \left(-\frac{u^2}{6} + 4,5 \right) = -\frac{u^3}{12} + 2,25u, \\ &0 < u < 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$A'(u) = -\frac{u^2}{4} + 2,25, \quad A'(u) = 0 \Rightarrow u = 3.$$

$$A''(u) = -\frac{u}{2}, \quad A''(3) < 0 \Rightarrow \text{Maximum.}$$

Auf dem ganzen zulässigen Intervall gilt $A''(u) < 0$. Damit ist dies das globale Maximum.

$$C = (u|f(u)) = (3|3), \quad A(3) = \frac{9}{2}.$$

Antwortsatz. Für $u = 3$ ist $A_{\max} = \frac{9}{2}$ FE. Der Punkt ist $C(3|3)$.

! Проверка модели

- не записали Hauptbedingung и Nebenbedingung;
- начали дифференцировать до того, как получили $A(u)$;
- забыли Definitionsbereich $0 < u < 3\sqrt{3}$;
- нашли $u = 3$, но не нашли координаты $C(3|3)$.

5 Прямоугольник в окружности

Пример из исходного конспекта. Дана окружность:

$$k: x^2 + (y + 1,45)^2 = 1,45^2.$$

В круге нужно найти прямоугольник с максимальной площадью.

Центр круга сдвинут вниз, но длины прямоугольника зависят от радиуса:

$$r = 1,45.$$

Диагональ любого прямоугольника внутри круга не длиннее диаметра $2r$. Если она короче, перенесём центр прямоугольника в центр круга: его вершины окажутся на расстоянии половины диагонали от центра. Теперь прямоугольник можно увеличить до касания всех вершин с окружностью. Поэтому у максимального прямоугольника диагональ равна диаметру, и по теореме Пифагора

$$a^2 + b^2 = (2r)^2.$$

Hauptbedingung:

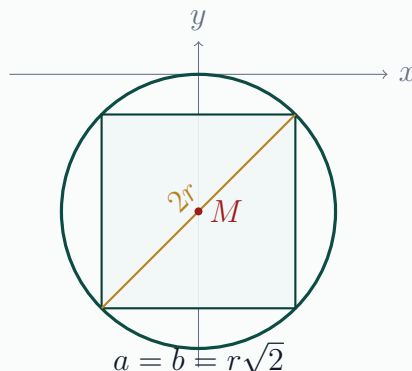
$$A = a \cdot b.$$

Nebenbedingung:

$$b = \sqrt{4r^2 - a^2}.$$

Для невырожденного прямоугольника $0 < a < 2r$ и $b > 0$. Для сравнения можно непрерывно продолжить площадь на $[0, 2r]$: на концах получится вырожденная фигура с нулевой площадью.

✓ Ключевая геометрия



6 Вычисление для круга

Почему получается квадрат

На допустимом промежутке $A \geq 0$, а возведение неотрицательных чисел в квадрат сохраняет их порядок. Поэтому максимумы A и A^2 достигаются в одном и том же месте. Квадрат площади проще дифференцировать, потому что он убирает корень:

$$A^2 = a^2 b^2.$$

Из дополнительного условия:

$$b^2 = 4r^2 - a^2.$$

Тогда:

$$A^2(a) = a^2(4r^2 - a^2) = 4r^2 a^2 - a^4.$$

Производная:

$$(A^2)'(a) = 8r^2 a - 4a^3 = 4a(2r^2 - a^2).$$

$$4a(2r^2 - a^2) = 0 \Rightarrow a = 0 \quad \text{или} \quad a^2 = 2r^2.$$

Граничное значение $a = 0$ даёт вырожденный прямоугольник с $A = 0$, поэтому для максимума берём положительный внутренний кандидат:

$$a^2 = 2r^2 \Rightarrow a = r\sqrt{2}.$$

Тогда:

$$b = r\sqrt{2}.$$

При $r = 1,45$:

$$a = b = 1,45\sqrt{2} \approx 2,05.$$

Das Rechteck mit maximalem Flächeninhalt ist ein Quadrat.

$$a = b \approx 2,05.$$

Максимальная площадь: $A_{\max} = 2r^2 = 4,205$ FE. На границах $a = 0$ и $a = 2r$ площадь равна 0, а во внутреннем кандидате положительна; других внутренних кандидатов нет. Значит, это глобальный максимум.

! Частая ошибка

Не нужно подставлять центр круга как сторону прямоугольника. Координаты центра влияют на положение, но максимальная форма в круге — квадрат.

7 Как доказать максимум или минимум

✓ Остановка 3: что доказывает стационарная точка?

Функция цели $F(t) = t^3$ задана на $[-1, 2]$. Найди стационарную точку. Будет ли она максимумом или минимумом? Найди глобальное наименьшее и наибольшее значения на заданном отрезке.

М Три нормальных способа проверки

Способ	Как писать
вторая производная	во внутренней стационарной точке: $Z''(x_0) < 0$ — локальный максимум, $Z''(x_0) > 0$ — локальный минимум
знак Z'	+ потом — означает максимум; — потом + означает минимум
граничные значения	сравнить значения на границах, если интервал закрытый

Е Допустимые значения

В оптимизации важна область допустимых значений (**Definitionsbereich**):

$$0 < a < 10, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < a < 2r.$$

Он показывает, какие значения вообще разрешены по смыслу задачи.

! Когда забывают граничные значения

Если задача задаёт закрытый интервал $[a, b]$, экстремум может быть на границе. Тогда после $Z'(x) = 0$ нужно проверить и граничные значения.

$$Z(a), \quad Z(b), \quad Z(x_0).$$

8 Как записать ответ на экзамене

M EPM-шаблон решения

1. Hauptbedingung:

$$Z = \dots$$

2. Nebenbedingung:

$$\dots = \dots$$

3. Zielfunktion:

$$Z(x) = \dots, \quad x \in \dots$$

4. Innere Kandidaten: где производная существует,

$$Z'(x) = 0.$$

Дополнительно проверь допустимые точки без производной.

5. Kontrolle:

$$Z''(x_0) < 0 \Rightarrow \text{Maximum} \quad \text{oder} \quad Z''(x_0) > 0 \Rightarrow \text{Minimum}.$$

Für das globale Optimum alle Kandidaten und zulässigen Randwerte vergleichen; an offenen Rändern Grenzwerte untersuchen.

6. Antwortsatz: Den gefundenen Wert zurück einsetzen und die Antwort in einem Satz formulieren.

E Формат ответа

Если спрашивают стороны, не заканчивай на $x = \dots$. Нужно вернуть смысл:

$$a = \dots, \quad b = \dots$$

Если спрашивают площадь или объём, добавь единицы: **FE**, **VE**, **LE**. Хороший финал звучит как ответ на вопрос:

Die maximale Fläche beträgt ...

или

Die Seiten müssen ... gewählt werden.

9 Типичные ошибки

! Ошибки модели и ответа

- не записали Hauptbedingung и Nebenbedingung;
- получили функцию с двумя переменными и сразу начали дифференцировать;
- не указали Definitionsbereich;
- нашли x , но не нашли реальные величины из условия: сторону, площадь, объём;
- забыли проверить Maximum или Minimum;
- перепутали радиус и диаметр;
- дали ответ без единицы измерения или итоговой фразы.

10 Самопроверка

✓ Реши коротко

Цель — проверить модель: основное условие, ограничение и целевую функцию одной переменной.

1. Прямоугольник имеет стороны a, b и периметр 24. Запиши НВ и NB для максимальной площади.
2. Для пункта 1 вырази b через a и найди стороны прямоугольника с максимальной площадью.
3. Прямоугольник под графиком $f(x) = 9 - x^2$ симметричен относительно y -Achse. Правая верхняя вершина имеет $x > 0$. Запиши $A(x)$.
4. Если уже найдено $Z'(x_0) = 0$ и $Z''(x_0) < 0$, что это значит?
5. Прямоугольник вписан в круг радиуса 3. Какая фигура даёт максимальную площадь и чему равны стороны?

✓ Самостоятельная задача на немецком

Авторская практика. Für ein rechteckiges Gehege an einer geraden Mauer stehen 40 m Zaun zur Verfügung. Die Seite an der Mauer braucht keinen Zaun. Bestimmen Sie die Abmessungen so, dass die Fläche maximal wird. Geben Sie den Definitionsbereich und die maximale Fläche an und begründen Sie das globale Maximum.

Перед расчётом отметить, сколько раз каждая сторона входит в длину забора. Ключ — на следующей странице.

A Antworten

1. НВ: $A = a \cdot b$. НВ: $2a + 2b = 24$.
2. $b = 12 - a$, $A(a) = a(12 - a)$ на $(0, 12)$, $A'(a) = 12 - 2a = 0$. Так как $A'' = -2 < 0$ на всём интервале, $a = b = 6$ дают глобальный максимум 36 FE.
3. Ширина $= 2x$, высота $= 9 - x^2$, значит $A(x) = 2x(9 - x^2)$, $0 < x < 3$.
4. В точке x_0 у целевой функции локальный максимум.
5. Максимальный прямоугольник в круге — квадрат:

$$a = b = r\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

A Ключ: ограда у стены

Пусть x — сторона поперёк стены, y — вдоль неё, обе в метрах.

$$2x + y = 40, \quad A = xy, \quad A(x) = x(40 - 2x), \quad 0 < x < 20.$$

$$A'(x) = 40 - 4x = 0 \Rightarrow x = 10, \quad y = 20.$$

На всём интервале $A'' = -4 < 0$, поэтому максимум глобальный. *Die Seiten sind 10 m und 20 m lang. Die maximale Fläche beträgt 200 m².*

Ключи к остановкам

A Проверь модель и доказательство

1. $b = 12 - a$, $A(a) = a(12 - a)$, $0 < a < 12$. $A'(a) = 12 - 2a = 0$ при $a = 6$; $b = 6$. Равенство $A(a) = 36 - (a - 6)^2 \leq 36$ доказывает глобальный максимум 36 FE, стороны 6 и 6 LE.
2. Правая координата $4 - x = 3$, ширина $3 - 1 = 2$, высота $f(1) = 3$, площадь 6 FE. Половина ширины равна $2 - x = 1$; в этой конкретной подстановке она случайно совпала с x . Переменная x обозначает координату левой вершины, а не длину стороны.
3. $F'(t) = 3t^2$ обращается в нуль при $t = 0$, но положительна с обеих сторон от нуля: локального экстремума там нет. Функция строго возрастает; глобальный минимум $F(-1) = -1$, максимум $F(2) = 8$ достигаются на границах.

11 Мини-словарь

M Немецкая формулировка → математическое действие

Фраза EPM	Что сразу записать
maximaler Flächeninhalt	Hauptbedingung: $A = \dots$, ищем максимум
minimaler Umfang	Hauptbedingung: $U = \dots$, ищем минимум
Volumen soll maximal sein	целевая функция: $V(x) = \dots$
unter dem Graphen	область ниже графика; для вершины на графике $y = f(x)$
P liegt auf dem Graphen	координаты связаны через $y = f(x)$
im Kreis	использовать уравнение окружности или радиус
mit vorgegebenem Umfang	дополнительное условие: $U = \text{const}$
mit vorgegebenem Volumen	дополнительное условие: $V = \text{const}$

12 Основное и дополнительное условия

М Типовые Hauptbedingungen

Что ищут	Частая Hauptbedingung
площадь прямоугольника	$A = a \cdot b$
объём коробки	$V = a \cdot b \cdot h$
площадь поверхности	$O = \dots$
периметр	$U = 2a + 2b$
расстояние	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

М Типы задач из учебника и вариантов

Формулировка	Что делать
Drehzylinder mit festem Volumen	$V = \pi r^2 h$ как NB, Oberfläche как Ziel
oben offener Zylinder	Oberfläche без крышки: $O = \pi r^2 + 2\pi r h$
Rechteck im Kreis	диагональ = $2r$, часто максимум даёт квадрат
Dreieck unter dem Graphen	координаты через параметр u , площадь $A(u)$
Rechteck unter Parabel	ширина через симметрию, высота через $f(x)$
Kosten minimal	стоимость = цена ₁ · длина ₁ + цена ₂ · длина ₂

Справка для повторения

➡ Один маршрут решения

- 1

Найди слово-маркер: **maximal, minimal, größtmöglich, kleinstmöglich.**
- 2

Запиши **Hauptbedingung**: что именно оптимизируем.
- 3

Запиши **Nebenbedingung**: какое ограничение дано в тексте.
- 4

Получи **Zielfunktion** одной переменной и задай допустимые значения.
- 5

Найди внутренние кандидаты, проверь границы и сравни значения; ответ с единицами.

Содержание

Нажми название или номер страницы. Закладки PDF повторяют разделы. Ответы открывай после собственной попытки.

Площадь через одну сторону	1	9 Типичные ошибки	10
1 Какие стороны дают наибольшую площадь .	2	10 Самопроверка	10
2 Модель под графиком	3	Antworten	11
3 Мини-пример под графиком	4	Ключ: ограда у стены	11
4 Треугольник под графиком	5	Ключи к остановкам	12
5 Прямоугольник в окружности	6	Проверь модель и доказательство	12
6 Вычисление для круга	7	11 Мини-словарь	12
7 Как доказать максимум или минимум	8	12 Основное и дополнительное условия	13
8 Как записать ответ на экзамене	9	Справка для повторения	14