

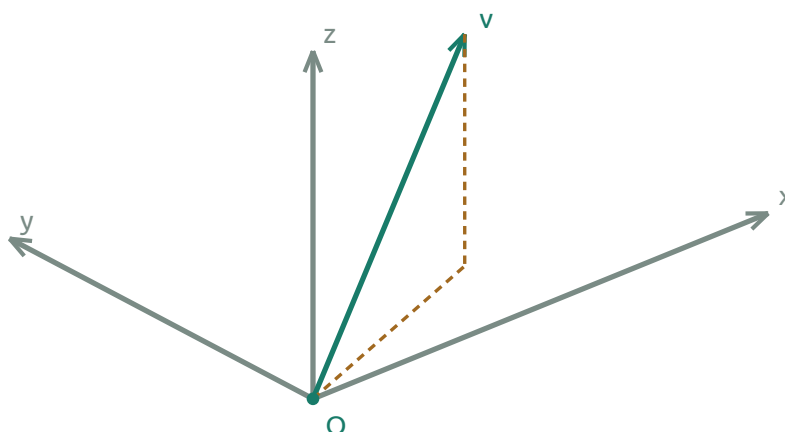
Векторы в пространстве и плоскости: объяснение

demidmath.com · Telegram: @demidmath

Одно направление позволяет двигаться по прямой. Два независимых направления позволяют перемещаться по плоскости. Начнём с точки и двух стрелок на плоской поверхности, затем найдём вектор, перпендикулярный обоим направлениям.

В пространстве особенно важно различать бесконечную плоскость и фигуру внутри неё. Точка может удовлетворять уравнению плоскости и всё же не принадлежать нарисованному параллелограмму.

Три координаты: длина и скалярное произведение



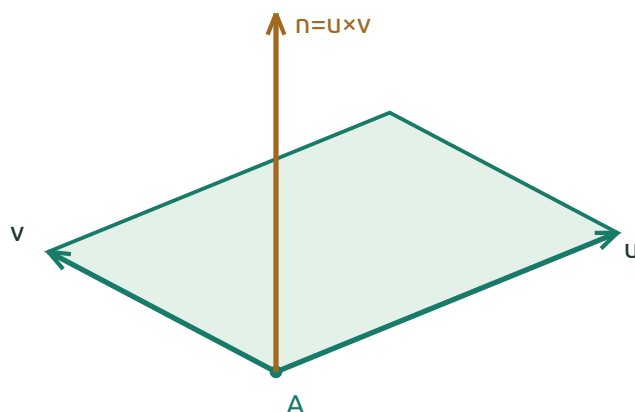
Три координатных направления помогают прочесть компоненты вектора в пространстве. Схема метода.

Для $A(a_1|a_2|a_3)$, $B(b_1|b_2|b_3)$ вектор $AB=B-A$. Длина $|v|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$. К третьей координате применяется тот же принцип, что к первым двум.

Скалярное произведение $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$. Если оба вектора ненулевые, $u \cdot v = 0$ означает перпендикулярность; $\cos \alpha = (u \cdot v) / (|u||v|)$ задаёт угол направленных векторов.

Например, $(1|2|0) \cdot (2|-1|3) = 2 - 2 + 0 = 0$. Третьи координаты могут отличаться, но это не мешает перпендикулярности. Нулевой вектор не задаёт направление и не имеет определённого угла с другим вектором.

Плоскость из точки и двух направлений



Плоскость задают точка A и два независимых направления. Нормаль n перпендикулярна плоскости. Схема метода.

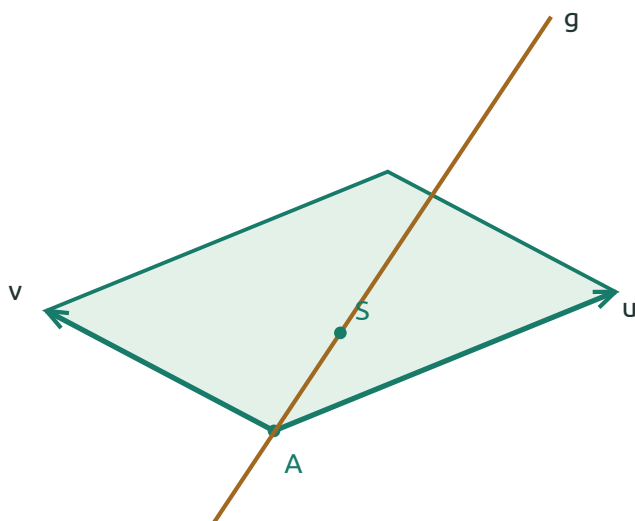
Parameterform плоскости: $X=A+su+tv$, $s,t \in \mathbb{R}$. Векторы u и v должны быть независимыми. Если один является кратным другого, такая запись описывает лишь прямую и не определяет единственную плоскость.

Нормаль удобно получить векторным произведением: $u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2 | u_3v_1 - u_1v_3 | u_1v_2 - u_2v_1)$. Этот вектор перпендикулярен обоим; его длина равна площади параллелограмма на u, v . При независимых направлениях он ненулевой.

Проверь найденную нормаль n равенствами $n \cdot u = n \cdot v = 0$. Затем Normalform: $n \cdot (X - A) = 0$. В координатах $n_1x + n_2y + n_3z = d$, где $d = n \cdot A$. Любой ненулевой кратный всей записи задаёт ту же плоскость.

Для $A(0|0|2)$, $u=(1|0|1)$, $v=(0|1|1)$ получаем $n=(-1|-1|1)$. Поэтому $-x-y+z=2$. Точка A , а также $A+u$ и $A+v$ удовлетворяют этому уравнению.

Прямая и плоскость: три возможных случая



Сначала находится общая точка прямой и плоскости; координаты используют один параметр прямой. Схема метода.

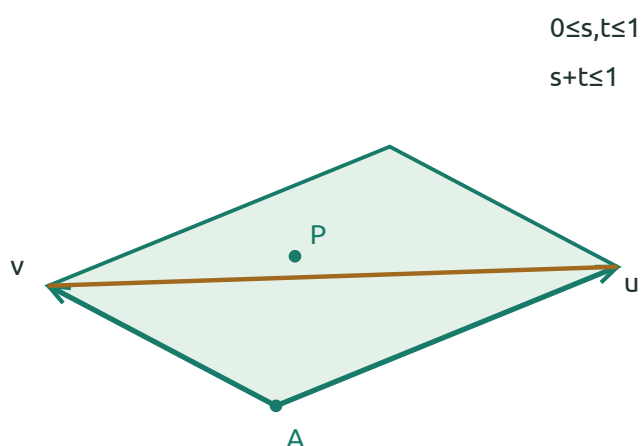
Прямая $X=P+\lambda w$ пересекает плоскость $n \cdot X=d$, если $n \cdot P+\lambda(n \cdot w)=d$. Сначала вычисли $n \cdot w$: это коэффициент неизвестного параметра.

Если $n \cdot w \neq 0$, параметр $\lambda=(d-n \cdot P)/(n \cdot w)$ единственный. Подставь его во все три координаты и проверь полученную точку в плоскости.

Если $n \cdot w=0$, направление параллельно плоскости. При $n \cdot P=d$ вся прямая лежит в плоскости, а при $n \cdot P \neq d$ пересечения нет. Деление на $n \cdot w$ до проверки уничтожает эти два случая.

Например, $X=(1|2|0)+\lambda(1|-1|2)$, $x+y+z=7$: $3+2\lambda=7$, $\lambda=2$, $S=(3|0|4)$. У прямых с постоянной координатой z достаточно сравнить её с горизонтальной плоскостью $z=c$.

Плоскость, параллелограмм и треугольник



$$0 \leq s, t \leq 1$$

$$s+t \leq 1$$

Диагональ: $s+t=1$

Параллелограмм: $0 \leq s, t \leq 1$. Треугольник: $s \geq 0, t \geq 0, s+t \leq 1$. Схема метода.

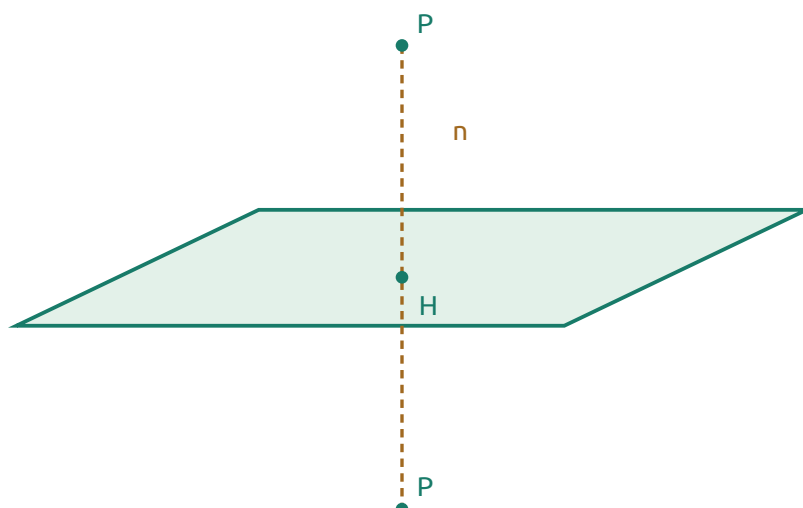
У $X=A+su+tv$ все реальные s, t дают плоскость. Для параллелограмма с вершинами $A, A+u, A+u+v, A+v$ нужны $0 \leq s \leq 1$ и $0 \leq t \leq 1$.

Для треугольника $A, A+u, A+v$ дополнительно требуется $s+t \leq 1$. Вместе с $s \geq 0, t \geq 0$ это описывает внутренность и границу треугольника.

У $A=(0|0|0)$, $u=(2|0|0)$, $v=(0|3|0)$ точка $P(1|2|0)$ имеет $s=1/2, t=2/3$. Она внутри параллелограмма, но вне треугольника: $7/6 > 1$. Одного равенства $z=0$ для принадлежности ограниченной фигуре недостаточно.

При пересечении фигуры с прямой сначала можно пересечь прямую с плоскостью. Затем найденную точку заново вырази через $A+su+tv$ и проверь ограничения. Это отдельный обязательный шаг.

Расстояние и проекция на плоскость



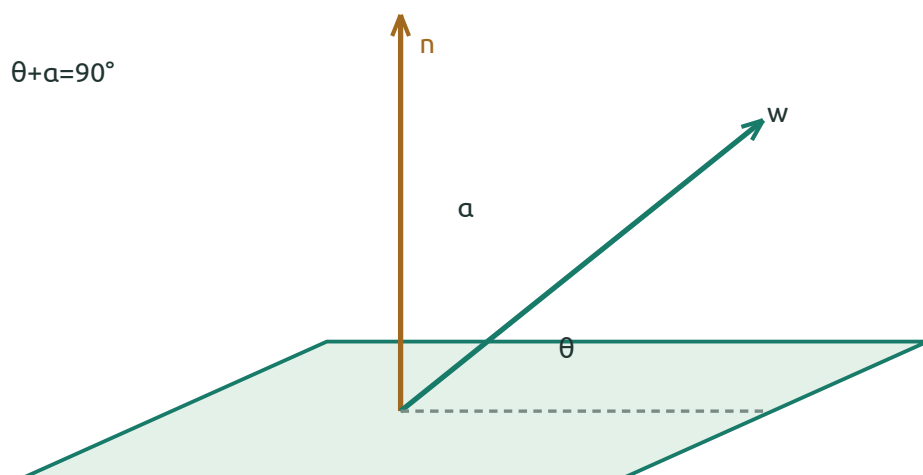
Проекция H лежит в плоскости, а P, H, P' расположены вдоль её нормали. Схема метода.

Для плоскости $\mathbf{n} \cdot \mathbf{X} = d$ и точки P расстояние равно $D = |\mathbf{n} \cdot \mathbf{P} - d| / |\mathbf{n}|$. Нормаль должна быть ненулевой. Здесь модуль нужен, потому что расстояние не может быть отрицательным.

Проекция $H = P - \delta \mathbf{n}$, где $\delta = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P} - d) / |\mathbf{n}|^2$. Проверяем $\mathbf{n} \cdot H = d$ и параллельность $\mathbf{PH}$ нормали. Отражение относительно плоскости $P' = 2H - P$.

У $P(1|2|3)$ и плоскости $z=1$ нормаль $(0|0|1)$. Проекция $H=(1|2|1)$, расстояние 2, отражение $P'=(1|2|-1)$. Это координатно простой пример общей формулы.

Угол с плоскостью и угол с нормалью



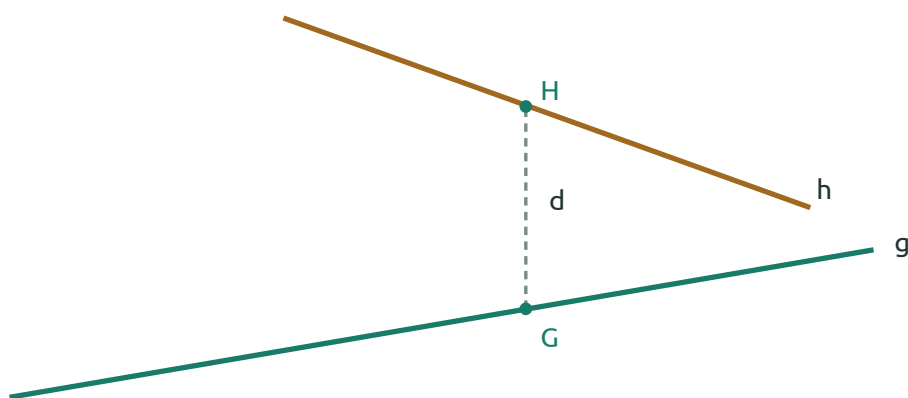
Угол θ с плоскостью и угол α с нормалью дополняют друг друга до 90° . Схема метода.

Пусть w — направление прямой, n — нормаль плоскости. Для меньшего угла θ прямой с плоскостью: $\sin\theta = |w \cdot n| / (|w||n|)$, $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$. Сначала находится угол с нормалью через $\cos$; искомый угол дополняет его до 90° .

Например, у оси z направление $(0|0|1)$. Для $x-2y+2z=1$ нормаль $(1|-2|2)$, $|n|=3$. Получаем $\sin\theta=2/3$, $\theta \approx 41,81^\circ$. Угол с нормалью равен примерно $48,19^\circ$.

Параллельной плоскости прямой соответствует $\theta=0^\circ$; прямой вдоль нормали — $\theta=90^\circ$. Эти крайние случаи помогают выбрать $\sin$ или $\cos$ и проверить смысл ответа. Для меньшего угла между двумя прямыми используется $\cos$ с модулем произведения их направлений.

Прямые в пространстве могут быть скрещивающимися



Непараллельные прямые в разных горизонтальных плоскостях могут не пересекаться. Схема метода.

Для двух прямых сначала сравни направления. При параллельных направлениях проверка опорной точки отличает совпадение от разных параллельных прямых. При непараллельных направлениях решай равенство координат с двумя независимыми параметрами.

Если три координатных уравнения совместны, прямые пересекаются. Если решения нет и направления не параллельны, прямые скрещиваются (windschief). На плоскости такого случая нет.

Перпендикулярные направления ещё не означают, что прямые пересекаются. Например, ось x лежит при $z=0$, а прямая $(0|1|1)+s(0|1|0)$ — при $z=1$. Их направления перпендикулярны, но общих точек нет. Отрезок от $(0|0|0)$ до $(0|0|1)$ перпендикулярен обеим прямым; его длина 1 — их кратчайшее расстояние.