

Векторы в пространстве и плоскости: разборы

demidmath.com · Telegram: @demidmath

Номера совпадают с практикой. Сначала решай самостоятельно; затем сверяй ход решения и проверку. В онлайн-версии разборы закрыты до раскрытия.

Задача 1

Bestimmen Sie $\overrightarrow{AB}$ und seine Länge für $A(1|0|-1)$, $B(3|-2|2)$.

Найдите $\overrightarrow{AB}$ и длину для $A(1|0|-1)$, $B(3|-2|2)$.

$$\overrightarrow{AB} = (3-1|-2-0|2-(-1)) = (2|-2|3).$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+4+9} = \sqrt{17}.$$

Проверка. $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B}$; квадрат длины равен 17.

Где легко ошибиться. Отрицательная исходная координата тоже вычитается в скобках.

Повторить: Три координаты: длина и скалярное произведение.

Задача 2

Für $u = (1|2|0)$ und $v = (2|-1|3)$ berechnen Sie $u \cdot v$ und prüfen Sie die Orthogonalität.

Для $u = (1, 2, 0)$, $v = (2, -1, 3)$ найдите $u \cdot v$ и определите, перпендикулярны ли они.

$$u \cdot v = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 = 0.$$

Оба вектора ненулевые: $|u|^2 = 5$, $|v|^2 = 14$. Поэтому они перпендикулярны.

Проверка. Произведение равно 0 при положительных длинах.

Где легко ошибиться. У нулевого вектора нельзя определить угол.

Повторить: Три координаты: длина и скалярное произведение.

Задача 3

Normieren Sie den Vektor $n = (2|-1|2)$.

Нормируйте вектор $n = (2|-1|2)$.

$$|n| = \sqrt{4+1+4} = 3.$$

Единичный вектор того же направления $e = (2/3|-1/3|2/3)$.

Проверка. $|e|^2 = 4/9 + 1/9 + 4/9 = 1$ и $n = 3e$.

Где легко ошибиться. Каждую координату нужно разделить на одну и ту же длину.

Повторить: Три координаты: длина и скалярное произведение.

Задача 4

Prüfen Sie $P(1|0|2)$ und $Q(0|0|2)$ auf Zugehörigkeit zur Ebene $x-y+2z=5$.

Проверьте $P(1|0|2)$, $Q(0|0|2)$ на принадлежность $x-y+2z=5$.

Для P получаем $1-0+4=5$: P принадлежит плоскости.

Для Q получаем $0-0+4=4 \neq 5$: Q не принадлежит плоскости.

Проверка. Только P удовлетворяет исходному уравнению.

Где легко ошибиться. Уравнение проверяется по всем координатам точки.

Повторить: Плоскость из точки и двух направлений.

Задача 5

Berechnen Sie $u \times v$ für $u=(1|0|0)$, $v=(0|2|0)$ und den Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms.

Найдите $u \times v$ для $u=(1|0|0)$, $v=(0|2|0)$ и площадь параллелограмма.

По координатной формуле $u \times v=(0|0|2)$.

Площадь равна длине произведения: $F=2$.

Проверка. Прямоугольник имеет стороны 1 и 2, поэтому его площадь также 2.

Где легко ошибиться. Векторное произведение — вектор; площадь — его длина.

Повторить: Плоскость из точки и двух направлений.

Задача 6

Bestimmen Sie auf $X=(1|-1|2)+t(2|1|-1)$ den Punkt für $t=3$.

На $X=(1|-1|2)+t(2|1|-1)$ найдите точку при $t=3$.

$x=1+6=7$, $y=-1+3=2$, $z=2-3=-1$.

Получаем $P=(7|2|-1)$.

Проверка. $P-(1|-1|2)=(6|3|-3)=3(2|1|-1)$.

Где легко ошибиться. Один и тот же t используется в трёх координатах.

Повторить: Прямая и плоскость: три возможных случая.

Задача 7

Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene durch $A(0|0|2)$ mit den Richtungsvektoren $u=(1,0,1)$ und $v=(0,1,1)$.

Найдите плоскость через $A(0|0|2)$ с направлениями $u=(1,0,1)$, $v=(0,1,1)$.

$n=u \times v=(-1|-1|1)$, этот вектор ненулевой.

$n \cdot A=2$. Следовательно, $-x-y+z=2$.

Параметрическая форма той же плоскости $X=(0|0|2)+s(1|0|1)+t(0|1|1)$.

Проверка. $n \cdot u=n \cdot v=0$, а A подходит уравнению.

Где легко ошибиться. Нормаль задаёт направление плоскости, но правая часть требует опорной точки.

Повторить: Плоскость из точки и двух направлений.

Задача 8

Bestimmen Sie den Schnittpunkt von $X=(1|2|0)+t(1|-1|2)$ mit $x+y+z=7$.

Найдите пересечение $X=(1,2,0)+t(1,-1,2)$ с $x+y+z=7$.

Подстановка даёт $(1+t)+(2-t)+2t=7$.

Отсюда $3+2t=7$, $t=2$. Все координаты считаем при $t=2$: $S=(3|0|4)$.

Проверка. $3+0+4=7$; S соответствует одному параметру.

Где легко ошибиться. Нельзя использовать три разных значения параметра для одной точки.

Повторить: Прямая и плоскость: три возможных случая.

Задача 9

Untersuchen Sie die Lage der Geraden $g=(0,0,2)+t(1,1,0)$ und $h=(0,0,3)+s(1,1,0)$ zur Ebene $z=2$.

Определите взаимное расположение плоскости $z=2$ и прямых $g=(0,0,2)+t(1,1,0)$, $h=(0,0,3)+s(1,1,0)$.

У g третья координата постоянно равна 2, поэтому вся прямая лежит в плоскости $z=2$.

У h третья координата постоянно равна 3. Пересечения с $z=2$ нет; h параллельна плоскости и не лежит в ней.

Проверка. Оба направления перпендикулярны нормали $(0|0|1)$; отличаются опорные точки.

Где легко ошибиться. $n \cdot w=0$ не различает параллельность без пересечения и принадлежность.

Повторить: Прямая и плоскость: три возможных случая.

Задача 10

Bestimmen Sie die Ebene durch $A(1|0|0)$, $B(0|1|0)$, $C(0|0|1)$.

Найдите плоскость через $A(1|0|0)$, $B(0|1|0)$, $C(0|0|1)$.

$AB=(-1|1|0)$, $AC=(-1|0|1)$. Их произведение $n=(1|1|1)$ ненулевое.

$n \cdot A=1$, поэтому $x+y+z=1$.

Проверка. Все три точки подходят; $n \cdot AB=n \cdot AC=0$.

Где легко ошибиться. Перед составлением плоскости нужно убедиться в независимости направлений.

Повторить: Плоскость из точки и двух направлений.

Задача 11

Bestimmen Sie den Abstand, den Lotfußpunkt und das Spiegelbild von $P(1|2|3)$ bezüglich $z=1$.

Найдите расстояние, проекцию и отражение $P(1|2|3)$ относительно $z=1$.

Перпендикуляр идёт вдоль оси z , поэтому проекция $H=(1|2|1)$.

Расстояние $|3-1|=2$. Отражение $P'=2H-P=(1|2|-1)$.

Проверка. Середина P и P' равна H ; H имеет $z=1$.

Где легко ошибиться. Отражение находится за плоскостью на том же расстоянии, что и P .

Повторить: Расстояние и проекция на плоскость.

Задача 12

Berechnen Sie den kleineren Winkel der Geraden mit Richtungsvektor $w=(1|0|-1)$ zur Ebene $z=0$.

Найдите меньший угол прямой направления $w=(1|0|-1)$ с плоскостью $z=0$.

Нормаль $n=(0|0|1)$, $|w|=\sqrt{2}$, $|n|=1$.

$\sin\theta=|w \cdot n|/(|w||n|)=1/\sqrt{2}$, поэтому $\theta=45^\circ$.

Проверка. Вертикальная и горизонтальная составляющие направления имеют одинаковые длины.

Где легко ошибиться. Формула с нормалью для угла с плоскостью использует $\sin$.

Повторить: Угол с плоскостью и угол с нормалью.

Задача 13

Berechnen Sie den Abstand von $P(1|2|3)$ zur Ebene $x-2y+2z=1$ und den kleineren Winkel der z -Achse mit dieser Ebene.

Найдите расстояние от $P(1|2|3)$ до $x-2y+2z=1$ и угол оси z с этой плоскостью.

$n=(1|-2|2)$, $|n|=3$. Числитель расстояния $n \cdot P-1=1-4+6-1=2$.

$D=2/3$ LE. Для оси z направление $w=(0|0|1)$.

$\sin\theta=|w \cdot n|/(|w||n|)=2/3$, поэтому $\theta \approx 41,81^\circ$.

Проверка. Угол оси z с нормалью $\arccos(2/3) \approx 48,19^\circ$; сумма углов равна 90° .

Где легко ошибиться. Угол с нормалью и угол с плоскостью — разные ответы.

Повторить: Угол с плоскостью и угол с нормалью.

Задача 14

Ein Parallelogramm ist durch den Eckpunkt $A=(0,0,0)$ und die Seitenvektoren $u=(2,0,0)$, $v=(0,3,0)$ gegeben. Prüfen Sie, ob $P(1|2|0)$ und $Q(3|1|0)$ zum Parallelogramm gehören. Liegt P auch im Dreieck mit den Eckpunkten A , $A+u$ und $A+v$?

Параллелограмм задан $A=(0,0,0)$, $u=(2,0,0)$, $v=(0,3,0)$. Проверьте $P(1|2|0)$ и $Q(3|1|0)$ на принадлежность фигуре. Лежит ли P в треугольнике с вершинами $A, A+u, A+v$?

Для P : $2s=1$, $3t=2$, поэтому $s=1/2, t=2/3$. Оба числа в $[0;1]$, P принадлежит параллелограмму.

Для Q : $s=3/2, t=1/3$. Координата $s>1$, поэтому Q вне параллелограмма, хотя $z=0$.

У треугольника дополнительно требуется $s+t \leq 1$. Для P сумма $7/6 > 1$, поэтому в этом треугольнике P не лежит.

Проверка. Граница треугольника BC имеет $x/2+y/3=1$; для P левая часть $7/6$.

Где легко ошибиться. Принадлежность плоскости проверяет только бесконечную поверхность.

Повторить: Плоскость, параллелограмм и треугольник.

Задача 15

Gegeben sind $A(-1|-1|1)$, $B(3|-1|1)$, $C(3|3|3)$, $D(-1|3|3)$. Bestimmen Sie die Ebene, ihren Schnittpunkt mit der z-Achse und prüfen Sie dessen Zugehörigkeit zum Parallelogramm. Berechnen Sie den kleineren Winkel der z-Achse mit einer Normalen der Ebene.

Для параллелограмма $A(-1|-1|1)$, $B(3|-1|1)$, $C(3|3|3)$, $D(-1|3|3)$ найдите плоскость и пересечение с осью z, проверьте принадлежность фигуры; найдите меньший угол оси z с нормалью.

$AB=(4|0|0)$, $AD=(0|4|2)$; $C=A+AB+AD$. Нормаль можно взять $n=(0|-1|2)$.

$n \cdot A=3$, поэтому $-y+2z=3$. На оси z $x=y=0$, отсюда $P=(0|0|3/2)$.

В записи $P=A+sAB+tAD$ первые две координаты дают $s=t=1/4$. Третья $1+2t=3/2$ тоже верна; P принадлежит параллелограмму.

Спрашивается угол с нормалью: $\cos\varphi=2/\sqrt{5}$, $\varphi \approx 26,57^\circ$.

Проверка. $n \cdot AB=n \cdot AD=0$; оба параметра в $[0;1]$.

Где легко ошибиться. Не заменяй проверку фигуры проверкой её плоскости; внимательно прочитай, с чем измеряется угол.

Повторить: Плоскость, параллелограмм и треугольник.

Задача 16

Untersuchen Sie g: $X=(0|0|0)+t(1|0|0)$ und h: $X=(0|1|1)+s(0|1|0)$. Schneiden sie sich? Bestimmen Sie den Winkel ihrer Richtungen und ihren kürzesten Abstand.

Исследуйте g: $X=t(1|0|0)$, h: $X=(0|1|1)+s(0|1|0)$: пересечение, угол направлений и кратчайшее расстояние.

На g всегда $z=0$, на h всегда $z=1$. Общих точек нет. Направления $(1|0|0)$ и $(0|1|0)$ не параллельны: прямые скрещиваются.

Скалярное произведение направлений равно 0, поэтому угол их направлений 90° .

Точки $G=(0|0|0)$, $H=(0|0|1)$ принадлежат g и h ($t=0, s=-1$). $GH=(0|0|1)$ перпендикулярен обоим направлениям.

Для любых точек расстояние в квадрате равно $t^2+(1+s)^2+1 \geq 1$; при найденных параметрах равенство достигается. Кратчайшее расстояние равно 1.

Проверка. Нижняя оценка расстояния подтверждает глобальный минимум, а не только перпендикулярность одного отрезка.

Где легко ошибиться. Перпендикулярные направления не гарантируют пересечения прямых в пространстве.

Повторить: Прямые в пространстве могут быть скрещивающимися.

Задача 17

Soll $X=(0|0|1)+s(1|2|0)+t(2|4|0)$ eine eindeutig bestimmte Ebene sein? Begründen Sie und geben Sie zwei verschiedene Ebenen an, die alle so beschriebenen Punkte enthalten.

Определяет ли $X=(0|0|1)+s(1|2|0)+t(2|4|0)$ единственную плоскость? Найдите две разные плоскости, содержащие эти точки.

Второе направление равно удвоенному первому. Поэтому $X=(0|0|1)+(s+2t)(1|2|0)$ описывает прямую.

Все её точки имеют $z=1$ и $y=2x$. Значит подходят две разные плоскости $z=1$ и $2x-y=0$.

Единственной плоскости эта запись не задаёт; через указанную прямую проходит бесконечно много плоскостей.

Проверка. Векторное произведение направлений равно 0.

Где легко ошибиться. Два записанных вектора не всегда означают два независимых направления.

Повторить: Плоскость из точки и двух направлений.

Задача 18

Für die z -Achse und die Ebene $y+\sqrt{3}z=0$ wurde $\arccos(\sqrt{3}/2)=30^\circ$ als Winkel mit der Ebene angegeben. Korrigieren Sie die Begründung und den Winkel.

Для оси z и плоскости $y+\sqrt{3}z=0$ записано $\arccos(\sqrt{3}/2)=30^\circ$ как угол с плоскостью. Исправьте объяснение и ответ.

Нормаль $n=(0|1|\sqrt{3})$ имеет длину 2; направление оси z — $w=(0|0|1)$.

$\cos\alpha=\sqrt{3}/2$ вычисляет угол оси с нормалью: $\alpha=30^\circ$.

Искомый угол с плоскостью $\theta=90^\circ-\alpha=60^\circ$. Можно сразу записать $\sin\theta=\sqrt{3}/2$.

Проверка. θ лежит в $[0^\circ;90^\circ]$ и дополняет угол с нормалью.

Где легко ошибиться. Один правильный численный расчёт может отвечать на другой геометрический вопрос.

Повторить: Угол с плоскостью и угол с нормалью.