

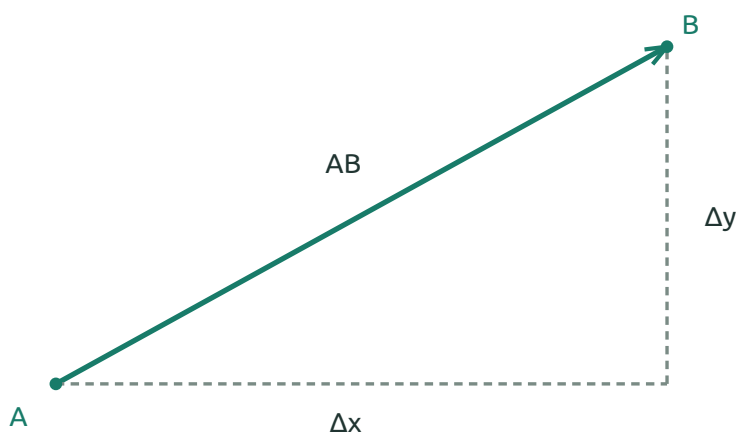
Векторы на плоскости и прямые: объяснение

demidmath.com · Telegram: @demidmath

Из точки А можно попасть в В, сделав определённый сдвиг по горизонтали и по вертикали. Эти два изменения и образуют вектор АВ. Он описывает перемещение, поэтому не зависит от того, где мы нарисуем его стрелку.

Когда один и тот же сдвиг повторяется с разным множителем, получается прямая. Сначала разберём смысл такой записи, затем научимся находить пересечения, расстояния и отражения.

От двух точек к вектору и длине



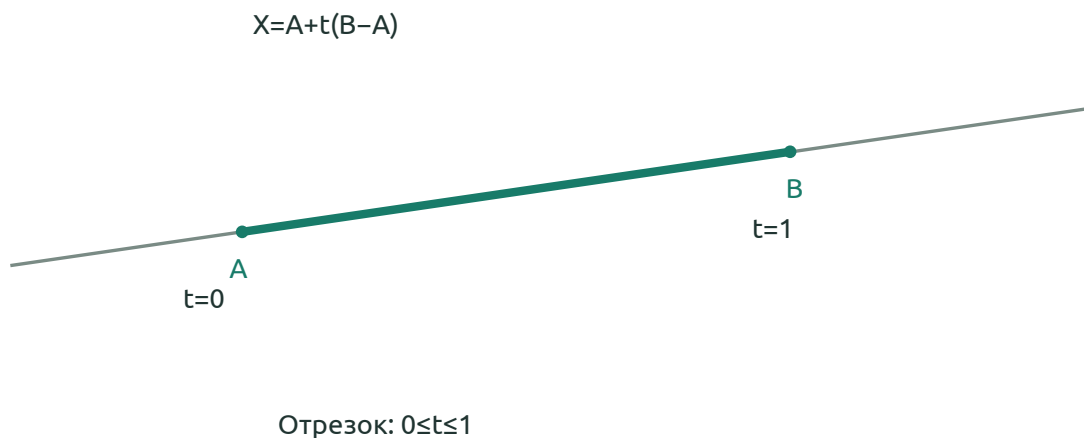
Вектор — перемещение от А к В; его компоненты образуют катеты прямоугольного треугольника. Схема метода.

Для $A(a_1|a_2)$, $B(b_1|b_2)$ получаем $AB=B-A=(b_1-a_1|b_2-a_2)$. Порядок важен: $BA=-AB$. Точка показывает положение, а вектор — изменение координат.

Для $A(-1|2)$, $B(3|5)$ сдвиг равен $(4|3)$. По Пифагору длина $|AB|=\sqrt{4^2+3^2}=5$. Вообще $|v|=\sqrt{v_1^2+v_2^2}$. Единичный вектор $v/|v|$ определён только для $v\neq 0$.

Середина отрезка $M=(A+B)/2$: усредняем обе координаты. Здесь $M=(1|3,5)$, и $AM=MB=(2|1,5)$. Координаты середины имеют единицы длины, а параметр доли отрезка — безразмерный.

Точка, направление и параметр



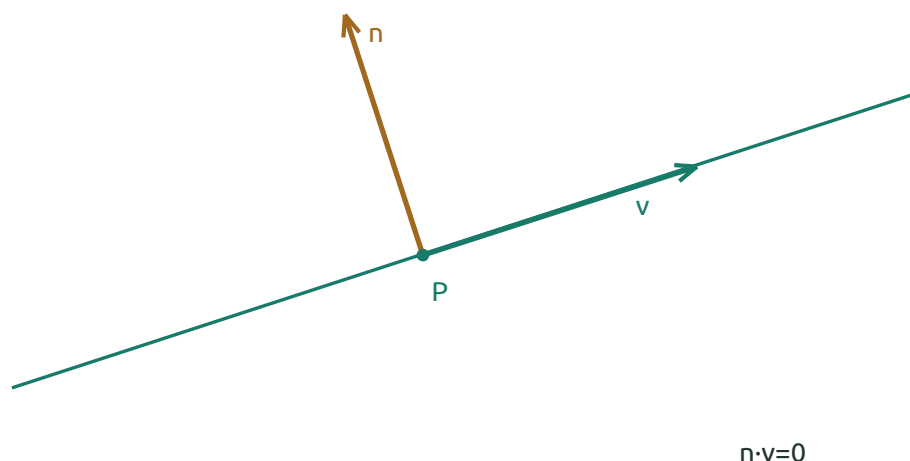
Одна параметрическая запись описывает прямую; ограничения параметра выделяют отрезок AB. Схема метода.

Пусть P — точка прямой, $v \neq 0$ — её Richtungsvektor. Запись $X=P+tv$, $t \in \mathbb{R}$ означает: начать в P и пройти t шагов v . Один и тот же t подставляется во все координаты.

Например, прямая через $A(1|2)$, $B(5|4)$: $AB=(4|2)$, поэтому можно взять $v=(2|1)$. Тогда $X=(1|2)+t(2|1)$, то есть $x=1+2t$, $y=2+t$. При $t=0$ получаем A , при $t=2$ — B .

Чтобы проверить точку, найди t по одной координате и подставь во вторую. Для отрезка AB удобнее именно $X=A+t(B-A)$, $0 \leq t \leq 1$; луч из A через B имеет $t \geq 0$. Если направление было уменьшено, численные границы t также изменятся.

Нормаль даёт другую запись той же прямой



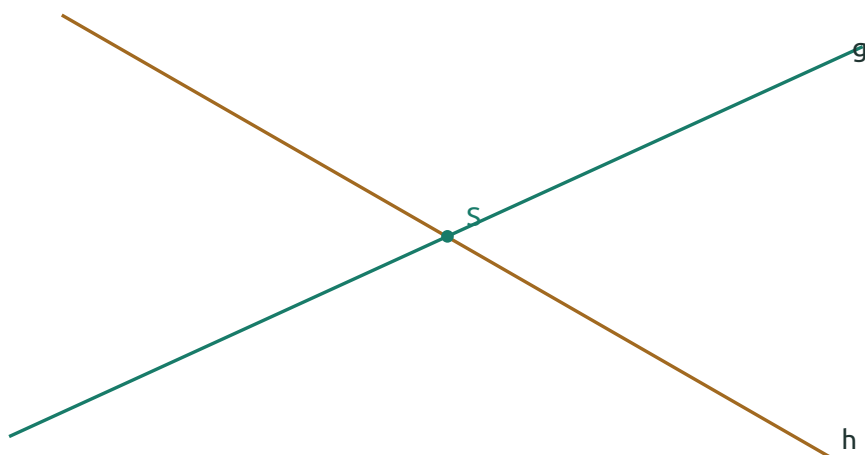
Направление v идёт вдоль прямой, нормаль n перпендикулярна ей. Схема метода.

Скалярное произведение $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$. Для двух ненулевых векторов равенство $u \cdot v = 0$ означает перпендикулярность. Если $v = (p|q)$, подходящая нормаль $n = (q|-p)$. Её ненулевой кратный вектор тоже подходит.

Normalvektorform через P : $n \cdot (X - P) = 0$. Для $n = (a|b)$ это $ax + by = c$, где $c = n \cdot P$ и $(a|b) \neq (0|0)$. Нормаль перпендикулярна прямой, а направление параллельно ей.

У прямой $X = (1|2) + t(2|1)$ возьмём $n = (1|-2)$. Получаем $x - 2y = -3$. Подстановка обеих исходных точек и равенство $n \cdot v = 0$ независимо проверяют уравнение. Этот способ работает и для вертикальной прямой, где запись $y = kx + d$ неудобна.

Пересечение: одно решение, ни одного или вся прямая



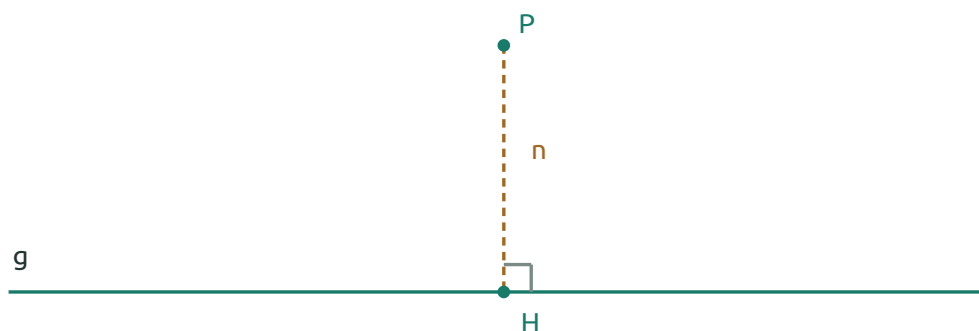
Точка S должна одновременно принадлежать двум прямым. Схема метода.

В точке пересечения должны одновременно выполняться оба уравнения прямых. Из $2x - y = 1$ и $x + y = 5$ после сложения получаем $3x = 6$, то есть $S(2|3)$. Проверь S в обоих исходных уравнениях.

При параметрических записях разных прямых используй разные параметры t и s , затем приравняй координаты. Направления не параллельны — на плоскости пересечение единственно.

Параллельные направления требуют ещё проверки опорной точки: прямые могут совпадать. Подстановка всей параметрической прямой в другое уравнение даёт тождество для совпадения или противоречие для разных параллельных прямых.

Расстояние, основание перпендикуляра и отражение



Основание H лежит на прямой; PH перпендикулярен ей и параллелен нормали. Схема метода.

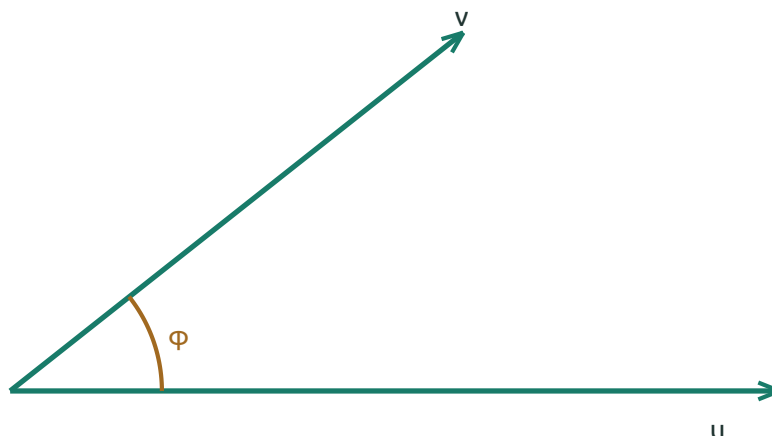
Для $g: ax+by=c$ и точки P обозначим $n=(a|b)$. Перпендикуляр к g проходит из P вдоль n , поэтому его основание имеет вид $H=P-\delta n$. Подстановка H в прямую даёт $\delta=(n \cdot P - c)/(n \cdot n)$.

Расстояние $d=|PH|=|n \cdot P - c|/|n|$. В знаменателе расстояния стоит длина нормали, а у коэффициента δ — её квадрат. Сам δ может быть отрицательным: это направление сдвига, а не расстояние.

Для $P(1|2)$ и $3x+4y=1$: $n \cdot P - c = 10$, $|n|=5$. Получаем $d=2$, $\delta=2/5$ и $H=(-1/5|2/5)$. Проверки: $3H_x+4H_y=1$ и PH параллелен $(3|4)$.

При отражении H — середина PP' , поэтому $P'=2H-P$. У $P(4|1)$ и $x+y=2$ получаем $H=(5/2|-1/2)$, $P'=(1|-2)$. Середина исходной и отражённой точки возвращает H .

Какой угол спрашивается



Меньший угол прямых измеряется между их направлениями. Схема метода.

Для направленных ненулевых векторов $\cos \alpha = (u \cdot v) / (|u||v|)$, $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. Если спрашивают меньший угол между прямыми, направления можно развернуть; поэтому $\cos \varphi = |u \cdot v| / (|u||v|)$, $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.

У $y=x$ направление $(1|1)$, у оси x — $(1|0)$. Получаем $\cos \varphi = 1/\sqrt{2}$ и $\varphi = 45^\circ$. Перед вычислением подпиши, какие именно направления сравниваются: направление прямой и её нормаль не взаимозаменяемы.

Оставляй дроби и корни до последнего шага. Если условие требует градусы, калькулятор должен работать в DEG. Подстановка точки и геометрическая проверка часто обнаруживают ошибку раньше округления.