

Векторы на плоскости и прямые: разборы

demidmath.com · Telegram: @demidmath

Номера совпадают с практикой. Сначала решай самостоятельно; затем сверяй ход решения и проверку. В онлайн-версии разборы закрыты до раскрытия.

Задача 1

Bestimmen Sie den Vektor $\overrightarrow{AB}$ für $A(2|-1)$ und $B(5|3)$.

Найдите вектор $\overrightarrow{AB}$ для $A(2|-1)$, $B(5|3)$.

Вектор направлен из A в B , поэтому вычитаем координаты A из координат B .

$$\overrightarrow{AB} = (5-2|3-(-1)) = (3|4).$$

$$\text{Проверка. } A + \overrightarrow{AB} = (2|-1) + (3|4) = (5|3) = B.$$

Где легко ошибиться. Вторая координата равна $3-(-1)$, а не $3-1$.

Повторить: От двух точек к вектору и длине.

Задача 2

Berechnen Sie die Länge von $v = (-6|8)$ und einen Einheitsvektor in derselben Richtung.

Найдите длину $v = (-6|8)$ и единичный вектор того же направления.

$$|v| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10.$$

$$\text{Делим обе координаты на положительную длину: } e = (-3/5|4/5).$$

$$\text{Проверка. } |e|^2 = 9/25 + 16/25 = 1, v = 10e.$$

Где легко ошибиться. Единичный вектор сохраняет знак каждой координаты.

Повторить: От двух точек к вектору и длине.

Задача 3

Bestimmen Sie den Mittelpunkt der Strecke mit $A(-2|1)$ und $B(4|5)$.

Найдите середину отрезка $A(-2|1)$, $B(4|5)$.

$$M = ((-2+4)/2|(1+5)/2) = (1|3).$$

Обе координаты усредняются независимо.

$$\text{Проверка. } \overrightarrow{AM} = (3|2) = \overrightarrow{MB}.$$

Где легко ошибиться. Не усредняй x одной точки с y другой.

Повторить: От двух точек к вектору и длине.

Задача 4

Geben Sie einen Normalvektor zum Richtungsvektor $v=(2|-3)$ an und überprüfen Sie ihn.

Укажите нормаль к направлению $v=(2|-3)$ и проверьте её.

Можно переставить координаты и изменить знак одной: $n=(3|2)$.

$n \cdot v = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 0$; оба вектора ненулевые.

Проверка. Любой ненулевой кратный $(3|2)$ также подходит.

Где легко ошибиться. Переставить координаты без изменения знака недостаточно.

Повторить: Нормаль даёт другую запись той же прямой.

Задача 5

Die Gerade ist $X=(1|-2)+t(3|1)$. Bestimmen Sie den Punkt für $t=2$.

На прямой $X=(1|-2)+t(3|1)$ найдите точку при $t=2$.

$x=1+2 \cdot 3=7$; $y=-2+2 \cdot 1=0$.

Получаем $P(7|0)$.

Проверка. $P-(1|-2)=(6|2)=2(3|1)$.

Где легко ошибиться. Параметр t умножает обе координаты направления.

Повторить: Точка, направление и параметр.

Задача 6

Prüfen Sie, ob $P(3|1)$ und $Q(2|0)$ auf $2x-y=5$ liegen.

Проверьте принадлежность $P(3|1)$ и $Q(2|0)$ прямой $2x-y=5$.

Для P : $2 \cdot 3 - 1 = 5$, поэтому P лежит на прямой.

Для Q : $2 \cdot 2 - 0 = 4 \neq 5$, поэтому Q не лежит на прямой.

Проверка. Решает исходное уравнение только P .

Где легко ошибиться. Каждую точку проверяй целиком.

Повторить: Пересечение: одно решение, ни одного или вся прямая.

Задача 7

Für $A(-1|2)$ und $B(3|5)$ bestimmen Sie AB , die Länge der Strecke und ihren Mittelpunkt M .

Для $A(-1|2)$, $B(3|5)$ найдите AB , длину и середину M .

$AB=(3-(-1)|5-2)=(4|3)$.

$|AB|=\sqrt{16+9}=5$. Середина $M=((-1+3)/2|(2+5)/2)=(1|3,5)$.

Проверка. $AM=MB=(2|1,5)$.

Где легко ошибиться. Длина — число, а середина — точка.

Повторить: От двух точек к вектору и длине.

Задача 8

Stellen Sie die Gleichung der Geraden durch $(2|-1)$ mit dem Richtungsvektor $(3,2)$ in Normalform auf.

Запишите прямую через $(2|-1)$ с направлением $(3,2)$ в нормальной форме.

Нормаль к $(3|2)$ можно взять $n=(2|-3)$, поскольку $2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 0$.

Прямая через $P(2|-1)$: $2(x-2) - 3(y+1) = 0$.

После раскрытия скобок получаем $2x - 3y = 7$.

Проверка. Подстановка $X=(2+3t|-1+2t)$ даёт 7 при любом t .

Где легко ошибиться. Направляющий вектор не является нормалью этой же прямой.

Повторить: Нормаль даёт другую запись той же прямой.

Задача 9

Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden $2x - y = 1$ und $x + y = 5$.

Найдите пересечение $2x - y = 1$ и $x + y = 5$.

Складываем уравнения: $3x = 6$, поэтому $x = 2$.

Из $x + y = 5$ получаем $y = 3$. Следовательно, $S(2|3)$.

Проверка. $2 \cdot 2 - 3 = 1$ и $2 + 3 = 5$.

Где легко ошибиться. Одна подходящая координата ещё не проверяет точку.

Повторить: Пересечение: одно решение, ни одного или вся прямая.

Задача 10

Berechnen Sie den Abstand des Punktes $P(1|2)$ von der Geraden $3x + 4y = 1$ und bestimmen Sie den Lotfußpunkt.

Найдите расстояние от $P(1|2)$ до прямой $3x + 4y = 1$ и основание перпендикуляра.

$n=(3|4)$, $|n|=5$. Числитель $n \cdot P - 1 = 3 + 8 - 1 = 10$.

$d = |10|/5 = 2$. Для проекции $\delta = 10/25 = 2/5$.

$H = P - \delta n = (1 - 6/5 | 2 - 8/5) = (-1/5 | 2/5)$.

Проверка. $3(-1/5) + 4(2/5) = 1$; $|PH| = 2$.

Где легко ошибиться. В формуле d делим на 5; в формуле δ — на 25.

Повторить: Расстояние, основание перпендикуляра и отражение.

Задача 11

Gegeben sind $A(0|0)$, $B(2|1)$ und $P(6|3)$. Liegt P auf der Geraden AB und auf der Strecke AB ?

$A(0|0)$, $B(2|1)$, $P(6|3)$. Лежит ли P на прямой AB и на отрезке AB ?

$P=A+t(B-A)$ даёт $2t=6$ и $t=3$. Обе координаты согласованы.

Следовательно, P лежит на прямой. Для отрезка требуется $0 \leq t \leq 1$, а $t=3$ не подходит.

Проверка. P находится в три раза дальше от A , чем B , в том же направлении.

Где легко ошибиться. Ограничение параметра относится к отрезку, не ко всей прямой.

Повторить: Точка, направление и параметр.

Задача 12

Bestimmen Sie eine Parameterform und eine Normalform der Geraden durch $A(1|2)$ und $B(5|4)$.

Запишите прямую через $A(1|2)$, $B(5|4)$ в параметрической и нормальной форме.

$AB=(4|2)$. Для всей прямой можно взять более короткое направление $(2|1)$.

$X=(1|2)+t(2|1)$, $t \in \mathbb{R}$. Нормаль $n=(1|-2)$.

$n \cdot A = 1 - 4 = -3$, поэтому $x - 2y = -3$.

Проверка. B даёт $5 - 8 = -3$; $n \cdot (2|1) = 0$.

Где легко ошибиться. Замена направления меняет параметр точки B : теперь ей соответствует $t=2$.

Повторить: Нормаль даёт другую запись той же прямой.

Задача 13

Spiegeln Sie $P(3|0)$ an der Geraden $x-y=0$. Berechnen Sie den kleineren Winkel dieser Geraden mit der x -Achse.

Отразите $P(3|0)$ относительно $x-y=0$ и найдите меньший угол этой прямой с осью x .

Нормаль к $x-y=0$ равна $n=(1|-1)$. Для $P(3|0)$ коэффициент $\delta=3/2$.

$H=P-\delta n=(3/2|3/2)$; $P'=2H-P=(0|3)$.

У прямой направление $(1|1)$. $\cos \varphi = |(1|1) \cdot (1|0)| / (\sqrt{2} \cdot 1) = 1/\sqrt{2}$, $\varphi = 45^\circ$.

Проверка. Отражение относительно $y=x$ переставляет координаты.

Где легко ошибиться. Для отражения используется нормаль, для угла с осью — направление прямой.

Повторить: Расстояние, основание перпендикуляра и отражение.

Задача 14

Gegeben sind $A(0|0)$, $B(6|0)$, $C(2|3)$. Berechnen Sie den Dreiecksinhalt einmal mit AB als Grundseite und einmal mit BC.

Для $A(0|0)$, $B(6|0)$, $C(2|3)$ вычислите площадь треугольника с основаниями AB и BC.

$AB=6$; расстояние C до оси x равно 3. Поэтому $F=6 \cdot 3/2=9$.

$BC=(-4|3)$, $|BC|=5$. Нормаль к BC равна $(3|4)$, уравнение $3x+4y=18$.

Расстояние A до BC равно $18/5$. С другим основанием $F=5 \cdot (18/5)/2=9$.

Проверка. Оба выбора основания дали площадь 9 FE.

Где легко ошибиться. Высота должна быть перпендикулярна выбранному основанию.

Повторить: Расстояние, основание перпендикуляра и отражение.

Задача 15

Die Gerade $X=(1|2)+t(2|-1)$ schneidet den Kreis $x^2+y^2=25$. Bestimmen Sie die Schnittpunkte. Welche liegen auf dem Strahl $t \geq 0$ und auf der Strecke $0 \leq t \leq 1$?

Найдите пересечения $X=(1|2)+t(2|-1)$ с $x^2+y^2=25$ и проверьте ограничения $t \geq 0$ и $0 \leq t \leq 1$.

Подставляем $x=1+2t$, $y=2-t$: $(1+2t)^2+(2-t)^2=25$.

Линейные члены сокращаются: $5+5t^2=25$, $t^2=4$, $t=\pm 2$.

При $t=2$ получаем $(5|0)$, при $t=-2$ — $(-3|4)$. Луч $t \geq 0$ содержит только $(5|0)$; отрезок $0 \leq t \leq 1$ не содержит ни одной из этих точек.

Проверка. Обе точки дают $x^2+y^2=25$ и один согласованный параметр.

Где легко ошибиться. Не отбрасывай отрицательный корень до проверки типа геометрического объекта.

Повторить: Точка, направление и параметр.

Задача 16

Spiegeln Sie $P(4|1)$ an $x+y=2$. Bestimmen Sie den Lotfußpunkt und den Abstand als Kontrolle.

Отразите $P(4|1)$ относительно $x+y=2$; найдите основание перпендикуляра и расстояние.

$n=(1|1)$, $n \cdot P-2=3$, $n \cdot n=2$, поэтому $\delta=3/2$.

$H=(4|1)-(3/2|3/2)=(5/2|-1/2)$.

$P'=2H-P=(1|-2)$. Расстояние $d=3/\sqrt{2}$.

Проверка. $H_x+H_y=2$; середина P и P' равна H; $|PH|^2=9/2$.

Где легко ошибиться. Отражение в два раза дальше проекции по тому же перпендикуляру.

Повторить: Расстояние, основание перпендикуляра и отражение.

Задача 17

Vergleichen Sie $g: X=(1|0)+t(2|1)$ mit $h: 2x-4y=2$ und $k: 2x-4y=5$. Begründen Sie ohne unnötiges Lösen zweier Gleichungssysteme.

Сравните $g: X=(1|0)+t(2|1)$ с $h: 2x-4y=2$ и $k: 2x-4y=5$; выберите короткий метод.

Подстановка g даёт $2(1+2t)-4t=2$ при любом t . Значит все точки g лежат на h , прямые совпадают.

У k та же нормаль, но другая правая часть. Равенство $2=5$ невозможно: g и k — разные параллельные прямые.

Проверка. $n \cdot v = (2|-4) \cdot (2|1) = 0$; опорная точка $(1|0)$ подходит только h .

Где легко ошибиться. Параллельные направления не позволяют отличить совпадение от разных прямых.

Повторить: Пересечение: одно решение, ни одного или вся прямая.

Задача 18

Für $P(2|1)$ und $g: 3x+4y=0$ schreibt jemand $d=10/25=0,4$. Erklären und korrigieren Sie den Fehler; bestimmen Sie auch den Lotfußpunkt.

Для $P(2|1)$, $g: 3x+4y=0$ записано $d=10/25=0,4$. Исправьте ошибку и найдите основание перпендикуляра.

Число $10/25=2/5$ — коэффициент δ в $H=P-\delta(3|4)$, а не длина перпендикуляра.

Длина нормали равна 5, поэтому $d=10/5=2$.

$H=(2-6/5|1-8/5)=(4/5|-3/5)$.

Проверка. $3 \cdot 4/5 + 4 \cdot (-3/5) = 0$; $|P-H| = |(6/5|8/5)| = 2$.

Где легко ошибиться. Коэффициент вектора и длина вектора — разные величины.

Повторить: Расстояние, основание перпендикуляра и отражение.