

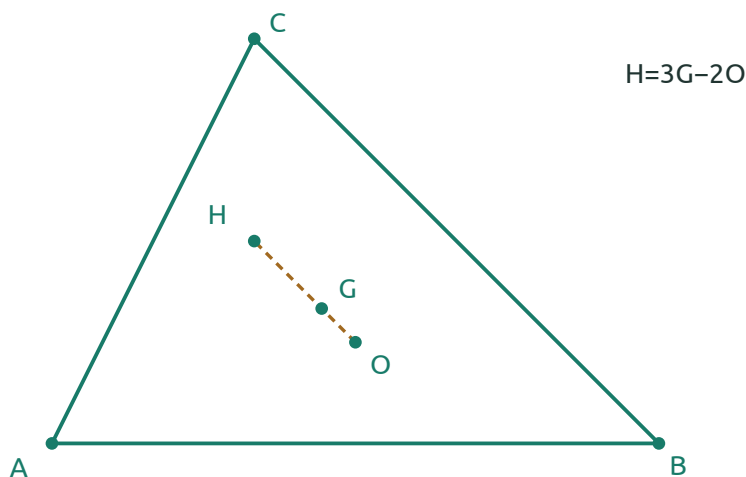
Особые точки треугольника и окружности: объяснение

demidmath.com · Telegram: @demidmath

Из вершины треугольника можно провести несколько разных прямых. Медиана идёт к середине противоположной стороны, высота — перпендикулярно ей. Они решают разные задачи, поэтому сначала нужно назвать свойство искомой линии.

Векторы помогают превратить это свойство в уравнение. Для высоты из А вектор ВС станет нормалью. Для серединного перпендикуляра та же нормаль используется с другой опорной точкой — серединой ВС.

Четыре центра начинаются с четырёх определений



У показанного треугольника G, O и H различаются. Каждый центр определяется своим построением. Схема метода.

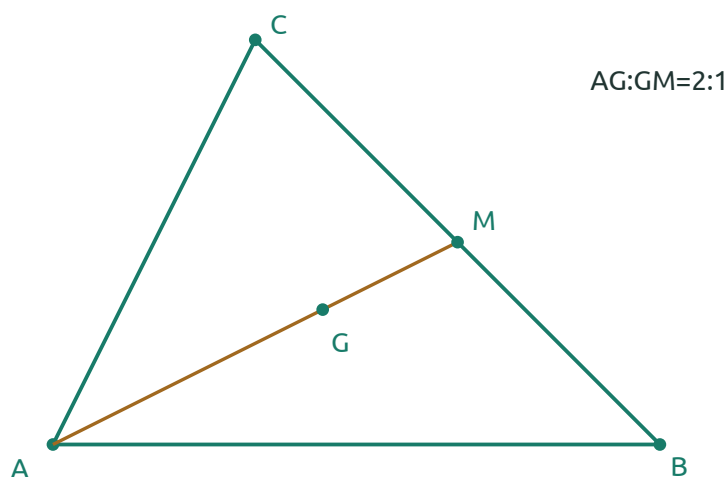
Schwerpunkt G — пересечение медиан. Медиана соединяет вершину с серединой противоположной стороны. $G=(A+B+C)/3$, и G делит медиану в отношении 2:1 от вершины.

Höhenschnittpunkt H — пересечение высот. Высота проходит через вершину перпендикулярно прямой противоположной стороны. Umkreismittelpunkt O — пересечение серединных перпендикуляров, то есть точка с равными расстояниями до всех трёх вершин.

Inkreismittelpunkt I — пересечение внутренних биссектрис. Его расстояния до трёх сторон равны радиусу вписанной окружности. G и I находятся внутри невырожденного треугольника; O и H могут находиться снаружи.

Перед поиском центров убедись, что три вершины не лежат на одной прямой. Для A, B, C на плоскости определитель $(B_x-A_x)(C_y-A_y)-(B_y-A_y)(C_x-A_x)$ должен быть ненулевым.

Медиана и среднее трёх вершин

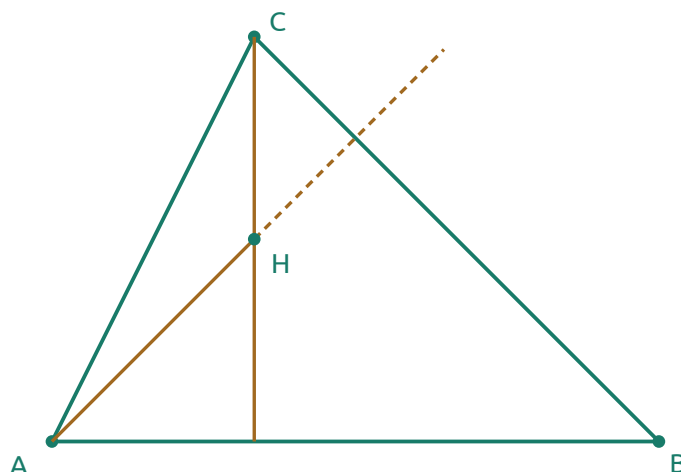


Медиана соединяет вершину A с серединой M противоположной стороны; $AG:GM=2:1$. Схема метода.

У $A(0|0)$, $B(6|0)$, $C(2|4)$ середина BC равна $M(4|2)$. Медиана из A имеет направление $\overrightarrow{AM}=(4|2)$, поэтому её уравнение $x-2y=0$.

Центроид $G=((0+6+2)/3|(0+0+4)/3)=(8/3|4/3)$. Проверяем: $G=A+(2/3)(M-A)$. Коэффициент $2/3$ измеряется от вершины, а не от середины стороны.

Высота через нормаль к противоположной стороне



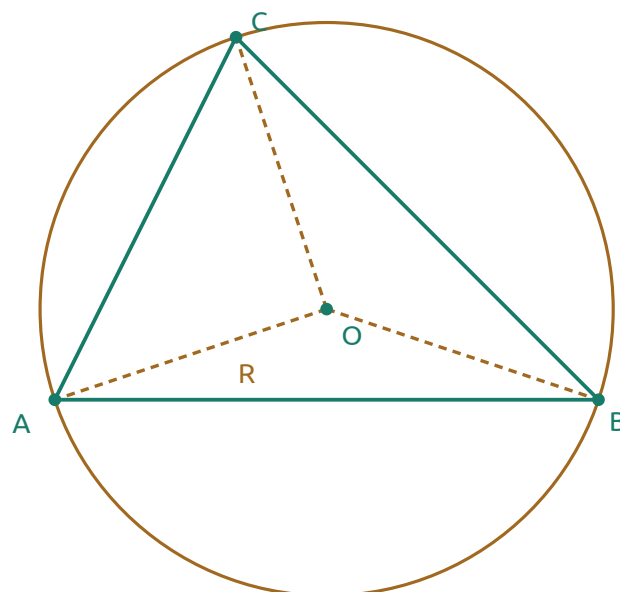
Высота проходит через вершину; нормаль этой высоты направлена вдоль противоположной стороны. Схема метода.

Высота из A проходит через A и перпендикулярна BC. Поэтому BC служит её нормалью: $(C-B) \cdot (X-A) = 0$. Не используй BC как направление высоты.

Для $A(0|0)$, $B(6|0)$, $C(2|4)$ нормаль $BC = (-4|4)$. Получаем $-4x + 4y = 0$, то есть $y = x$. Высота из C перпендикулярна $AB = (6|0)$: $6(x-2) = 0$, поэтому $x = 2$.

Их пересечение $H(2|2)$. В качестве независимой проверки $BH = (-4|2)$ и $AC = (2|4)$ имеют произведение $-8 + 8 = 0$: найденная точка лежит и на третьей высоте. Для определения H достаточно двух высот, третья помогает проверить результат.

Серединные перпендикуляры и описанная окружность



Описанная окружность проходит через все три вершины; $OA=OB=OC=R$. Схема метода.

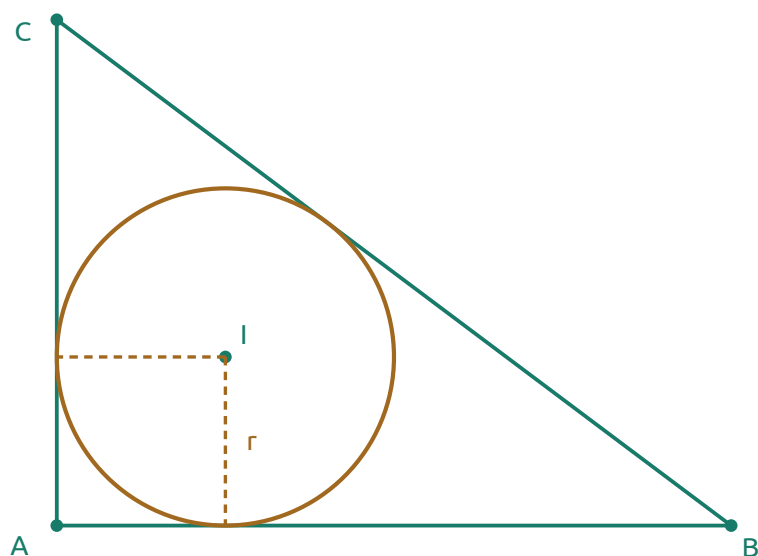
Серединный перпендикуляр АВ имеет нормаль $B-A$ и проходит через $M=(A+B)/2$:
 $(B-A) \cdot (X-M)=0$. Уравнение высоты использует вершину; здесь нужна середина стороны.

В том же треугольнике АВ горизонтальна, поэтому первый серединный перпендикуляр $x=3$.
Положим $O=(3|q)$. Равенство $OA^2=OC^2$ даёт $9+q^2=1+(q-4)^2$, откуда $q=1$.

$R^2=OA^2=10$. Окружность $(x-3)^2+(y-1)^2=10$. Подстановка В и С также даёт 10. В правой части уравнения окружности стоит квадрат радиуса.

В прямоугольном треугольнике О — середина гипотенузы, Н — вершина прямого угла. Это полезное геометрическое сокращение; для произвольного треугольника применять его нельзя.

Вписанная окружность: расстояния до сторон



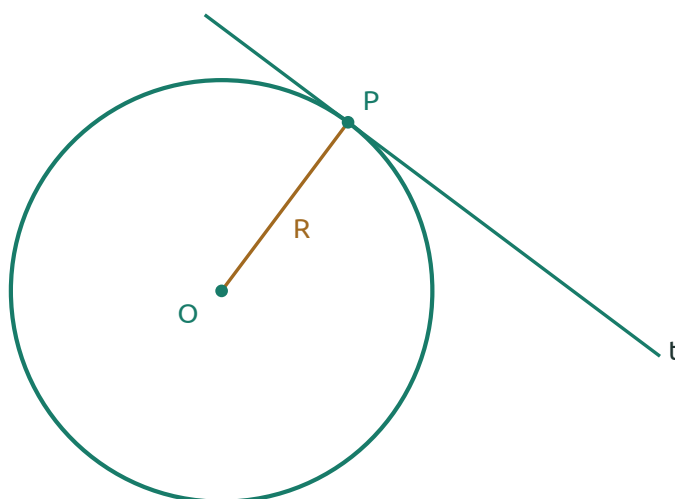
Центр I равноудалён от сторон; радиусы к точкам касания перпендикулярны сторонам. Схема метода.

Обозначим $a=|BC|$, $b=|CA|$, $c=|AB|$: каждая длина стоит напротив одноимённой вершины. Тогда $I=(aA+bB+cC)/(a+b+c)$. Это среднее с весами, а не обычное среднее координат.

Радиусы, проведённые к сторонам, делят треугольник на три треугольника общей высоты r . Поэтому $F=ar/2+br/2+cr/2=sr$, где $s=(a+b+c)/2$. Отсюда $r=F/s$.

Для $A(0|0)$, $B(4|0)$, $C(0|3)$: $a=5$, $b=3$, $c=4$. Получаем $I=(1|1)$, $F=6$, $s=6$, $r=1$. До осей расстояния равны 1; до BC: $3x+4y=12$ расстояние $|3+4-12|/5=1$. Так проверяется и третий контакт.

Касательная к окружности и связь центров



Касательная в P перпендикулярна радиусу OP ; радиус можно взять её нормалью. Схема метода.

У окружности $(x-p)^2+(y-q)^2=R^2$ центр $O(p|q)$. Сначала проверь, что точка P лежит на окружности. Если да, радиус OP является нормалью касательной: $(P-O) \cdot (X-P)=0$.

Например, $O(3|3)$, $R^2=8$, $P(5|5)$. Радиус $(2|2)$, поэтому $2(x-5)+2(y-5)=0$ и $x+y=10$. Направление $(1|-1)$ перпендикулярно радиусу.

Для невырожденного треугольника центры G , O и H связаны равенством $H=3G-2O$. После независимого нахождения центров оно служит проверкой. В примере $G=(8/3|4/3)$, $O=(3|1)$: $3G-2O=(2|2)=H$.

Если треугольник тупоугольный, не переносите центр внутрь только потому, что так выглядит привычный рисунок. Проверяйте равные расстояния и перпендикулярность, а положение отметьте на эскизе.