

Особые точки треугольника и окружности: разборы

demidmath.com · Telegram: @demidmath

Номера совпадают с практикой. Сначала решай самостоятельно; затем сверяй ход решения и проверку. В онлайн-версии разборы закрыты до раскрытия.

Задача 1

Bestimmen Sie den Schwerpunkt des Dreiecks $A(0|0)$, $B(6|0)$, $C(0|6)$.

Найдите центроид треугольника $A(0|0)$, $B(6|0)$, $C(0|6)$.

$$G = ((0+6+0)/3 | (0+0+6)/3) = (2|2).$$

Середина BC равна $(3|3)$; G лежит на медиане из A на $2/3$ пути.

Проверка. $G = A + (2/3)((3|3) - A)$; $x+y=4<6$.

Где легко ошибиться. Среднее двух вершин даёт середину стороны, а не центроид.

Повторить: Медиана и среднее трёх вершин.

Задача 2

Für $A(0|0)$, $B(6|0)$, $C(2|4)$ bestimmen Sie den Mittelpunkt von BC und eine Gleichung der Seitenhalbierenden aus A .

Для $A(0|0)$, $B(6|0)$, $C(2|4)$ найдите середину BC и медиану из A .

$$M = ((6+2)/2 | (0+4)/2) = (4|2).$$

Медиана проходит через A с направлением $(4|2)$: $X=t(4|2)$. В координатной форме $x-2y=0$.

Проверка. A и M удовлетворяют уравнению.

Где легко ошибиться. Медиана не обязана быть перпендикулярной стороне.

Повторить: Медиана и среднее трёх вершин.

Задача 3

Stellen Sie für $A(0|0)$, $B(6|0)$, $C(2|4)$ eine Gleichung der Höhe aus A auf.

Для $A(0|0)$, $B(6|0)$, $C(2|4)$ запишите высоту из A .

Нормаль к высоте равна $\vec{BC} = \vec{C} - \vec{B} = (-4|4)$.

Уравнение $-4(x-0)+4(y-0)=0$ упрощается до $y=x$.

Проверка. Направление высоты $(1|1)$ даёт $(1|1) \cdot (-4|4) = 0$.

Где легко ошибиться. Высота проходит через A , а не через середину BC .

Повторить: Высота через нормаль к противоположной стороне.

Задача 4

Bestimmen Sie die Mittelsenkrechte der Strecke $A(1|1)$, $B(5|1)$.

Найдите серединный перпендикуляр к $A(1|1)$, $B(5|1)$.

Середина $M=(3|1)$, вектор $\overrightarrow{AB}=(4|0)$.

Перпендикуляр через M имеет уравнение $4(x-3)=0$, то есть $x=3$.

Проверка. Любая точка $(3|y)$ имеет равные квадраты расстояний до A и B .

Где легко ошибиться. Серединный перпендикуляр обычно не проходит через вершину треугольника.

Повторить: Серединные перпендикуляры и описанная окружность.

Задача 5

Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius von $(x-2)^2+(y+1)^2=9$. Liegt $P(5|-1)$ auf dem Kreis?

Найдите центр и радиус $(x-2)^2+(y+1)^2=9$; проверьте $P(5|-1)$.

$O=(2|-1)$, $R=\sqrt{9}=3$.

Для P : $(5-2)^2+(-1+1)^2=9$. Следовательно, P лежит на окружности.

Проверка. $\overrightarrow{OP}=(3|0)$, $|\overrightarrow{OP}|=3$.

Где легко ошибиться. Знак внутри скобки противоположен координате центра.

Повторить: Серединные перпендикуляры и описанная окружность.

Задача 6

Ein Dreieck hat die Seitenlängen 3, 4 und 5 sowie den Flächeninhalt 6. Berechnen Sie seinen Inkreisradius.

У треугольника стороны 3, 4, 5 и площадь 6. Найдите радиус вписанной окружности.

Полупериметр $s=(3+4+5)/2=6$.

Из $F=gs$ получаем $g=6/6=1$.

Проверка. $gs=1\cdot 6=6$ возвращает данную площадь.

Где легко ошибиться. В формуле участвует полупериметр, а не весь периметр.

Повторить: Вписанная окружность: расстояния до сторон.

Задача 7

Gegeben sind $A(0|0)$, $B(8|0)$ und $C(0|6)$. Bestimmen Sie den Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC und die Gleichung seines Umkreises.

Для $A(0|0)$, $B(8|0)$, $C(0|6)$ найдите центр описанной окружности и её уравнение.

AB и AC перпендикулярны: прямой угол при A. O — середина гипотенузы BC, поэтому $O=(4|3)$.

$$R^2=OA^2=4^2+3^2=25, R=5.$$

$$\text{Окружность } (x-4)^2+(y-3)^2=25.$$

Проверка. A, B и C дают в левой части 25.

Где легко ошибиться. Не подставляй R вместо R^2 в уравнение.

Повторить: Серединные перпендикуляры и описанная окружность.

Задача 8

Bestimmen Sie den Höhenschnittpunkt von $A(0|0)$, $B(6|0)$, $C(2|4)$.

Найдите ортоцентр $A(0|0)$, $B(6|0)$, $C(2|4)$.

Высота из A: $BC=(-4|4)$ — нормаль, поэтому $-4x+4y=0$.

Высота из C: $AB=(6|0)$ — нормаль, поэтому $6(x-2)=0$.

Из $y=x$ и $x=2$ получаем $H=(2|2)$.

Проверка. $BH=(-4|2)$, $AC=(2|4)$, их произведение равно 0.

Где легко ошибиться. Для высоты нужна вершина, для серединного перпендикуляра — середина.

Повторить: Высота через нормаль к противоположной стороне.

Задача 9

Gegeben sind $A(0|0)$, $B(4|0)$ und $C(0|3)$. Berechnen Sie den Inkreisradius des Dreiecks ABC unabhängig über seinen Flächeninhalt und seinen Umfang.

Для $A(0|0)$, $B(4|0)$, $C(0|3)$ независимо найдите радиус вписанной окружности через площадь и периметр.

Стороны прямоугольного треугольника равны 3,4,5. $F=3\cdot4/2=6$.

$s=(3+4+5)/2=6$, поэтому $r=F/s=1$. Внутри прямого угла $I=(r|r)=(1|1)$.

Проверка. До BC: $3x+4y=12$ расстояние $|3+4-12|/5=1$.

Где легко ошибиться. Взять $F/12$ означает ошибочно использовать полный периметр.

Повторить: Вписанная окружность: расстояния до сторон.

Задача 10

Bestimmen Sie den Umkreismittelpunkt und den Radius von $A(-2|0)$, $B(2|0)$, $C(0|3)$.

Найдите центр и радиус описанной окружности $A(-2|0)$, $B(2|0)$, $C(0|3)$.

Из симметрии или серединного перпендикуляра AB получаем $O=(0|q)$.

Равенство $OA^2=OC^2$: $4+q^2=(3-q)^2=9-6q+q^2$. Отсюда $q=5/6$.

$R^2=4+25/36=169/36$, поэтому $R=13/6$.

Проверка. $OA^2=OB^2=OC^2=169/36$.

Где легко ошибиться. Симметрия определяет прямую для центра, но не его высоту.

Повторить: Серединные перпендикуляры и описанная окружность.

Задача 11

Bestimmen Sie Inkreismittelpunkt und Inkreisradius für $A(0|0)$, $B(6|0)$, $C(0|8)$.

Найдите центр и радиус вписанной окружности $A(0|0)$, $B(6|0)$, $C(0|8)$.

$a=10$, $b=8$, $c=6$. Взвешиваем противоположными сторонами: $I=(10A+8B+6C)/24=(2|2)$.

$F=6\cdot 8/2=24$, $s=12$, поэтому $r=2$.

Проверка. До BC : $4x+3y=24$ расстояние $|8+6-24|/5=2$; до осей также 2.

Где легко ошибиться. Не перепутай сторону a напротив A со стороной AB .

Повторить: Вписанная окружность: расстояния до сторон.

Задача 12

Der Kreis hat Mittelpunkt $O(-1|2)$ und Radius 5. Bestimmen Sie die Tangente im Punkt $P(2|6)$.

Окружность имеет центр $O(-1|2)$, радиус 5. Найдите касательную в $P(2|6)$.

$OP=(3|4)$, $|OP|=5$: точка P действительно лежит на окружности.

Радиус служит нормалью: $3(x-2)+4(y-6)=0$.

Касательная имеет уравнение $3x+4y=30$.

Проверка. P даёт $6+24=30$, направление $(4|-3)$ перпендикулярно OP .

Где легко ошибиться. Сначала необходимо проверить принадлежность P окружности.

Повторить: Касательная к окружности и связь центров.

Задача 13

Bestimmen Sie für $A(1|1)$, $B(5|1)$, $C(1|5)$ den Umkreis und seine Tangente in $P(5|5)$.

Для $A(1|1)$, $B(5|1)$, $C(1|5)$ найдите описанную окружность и касательную к ней в $P(5|5)$.

Угол при A прямой, поэтому O — середина BC : $O=(3|3)$. $R^2=OA^2=8$.

Окружность $(x-3)^2+(y-3)^2=8$. Для P левая часть равна $4+4=8$.

$OP=(2|2)$ — нормаль касательной. $2(x-5)+2(y-5)=0$, то есть $x+y=10$.

Проверка. Направление касательной $(1|-1)$ перпендикулярно OP .

Где легко ошибиться. Данная точка касания не обязана быть вершиной треугольника.

Повторить: Касательная к окружности и связь центров.

Задача 14

Gegeben sind $A(0|0)$, $B(6|0)$ und $C(2|4)$. Bestimmen Sie den Schwerpunkt G , den Umkreismittelpunkt O und den Höhenschnittpunkt H . Überprüfen Sie die Beziehung $H=3G-2O$.

Для $A(0|0)$, $B(6|0)$, $C(2|4)$ найдите G, O, H и проверьте связь $H=3G-2O$.

$G=(8/3|4/3)$. Серединный перпендикуляр AB даёт $O=(3|q)$.

Из $9+q^2=1+(q-4)^2$ получаем $q=1$, поэтому $O=(3|1)$.

Высоты $y=x$ и $x=2$ дают $H=(2|2)$.

$3G-2O=(8|4)-(6|2)=(2|2)=H$.

Проверка. $OA^2=OB^2=OC^2=10$; третья высота также проходит через H .

Где легко ошибиться. Равенство Эйлера здесь проверяет независимо найденные центры.

Повторить: Касательная к окружности и связь центров.

Задача 15

Für $A(0|0)$, $B(6|0)$, $C(1|1)$ bestimmen Sie O und H . Erklären Sie ihre Lage außerhalb des Dreiecks.

Для $A(0|0)$, $B(6|0)$, $C(1|1)$ найдите O, H и объясните их положение вне треугольника.

Серединный перпендикуляр AB : $x=3$. Для $O=(3|q)$ равенство $OA^2=OC^2$ даёт $9+q^2=4+(1-q)^2$, поэтому $q=-2$.

$O=(3|-2)$. Высота из C вертикальна: $x=1$. Нормаль высоты из A равна $BC=(-5|1)$, значит $-5x+y=0$.

$H=(1|5)$. O находится ниже AB , а H выше вершины C ; обе точки вне треугольника.

Скалярное произведение $CA \cdot CB=(-1|-1) \cdot (5|-1)=-4<0$: угол при C тупой, поэтому такое положение центров допустимо.

Проверка. $OA^2=OB^2=OC^2=13$; $BH=(-5|5)$ перпендикулярен $AC=(1|1)$.

Где легко ошибиться. Нельзя переносить полученный центр внутрь рисунка вопреки уравнениям.

Повторить: Высота через нормаль к противоположной стороне.

Задача 16

Bestimmen Sie G, H, O, I sowie Umkreisradius R und Inkreisradius r für $A(1|2)$, $B(7|2)$, $C(1|10)$.

Для $A(1|2)$, $B(7|2)$, $C(1|10)$ найдите G, H, O, I и радиусы R, r .

Треугольник прямоугольный при A , катеты 6 и 8, гипотенуза 10. Поэтому $H=A=(1|2)$.

O — середина BC : $O=(4|6)$, $R=5$. $G=((1+7+1)/3|(2+2+10)/3)=(3|14/3)$.

Площадь $F=24$, полупериметр $s=12$, $r=2$. Внутри прямого угла $I=(1+r|2+r)=(3|4)$.

Проверка Эйлера: $3G-2O=(9|14)-(8|12)=(1|2)=H$.

Проверка. До гипотенузы $4x+3y=34$ расстояние от I равно $|12+12-34|/5=2$.

Где легко ошибиться. При переносе треугольника нельзя оставлять $I=(r|r)$ без прибавления A .

Повторить: Четыре центра начинаются с четырёх определений.

Задача 17

Für $A(0|0)$, $B(4|0)$, $C(1|3)$ wird $3x+y=6$ als Höhe aus C angegeben. Prüfen und korrigieren Sie die Aussage.

Для $A(0|0)$, $B(4|0)$, $C(1|3)$ прямая $3x+y=6$ названа высотой из C . Проверьте и исправьте.

Прямая проходит через C и середину AB , $M=(2|0)$. Поэтому это медиана из C .

Направление $CM=(1|-3)$ не перпендикулярно $AB=(4|0)$, поскольку произведение равно 4.

Высота из C перпендикулярна горизонтальной AB , поэтому её уравнение $x=1$.

Проверка. C удовлетворяет $x=1$; направление $(0|1)$ перпендикулярно AB .

Где легко ошибиться. Прохождения через вершину недостаточно для высоты.

Повторить: Высота через нормаль к противоположной стороне.

Задача 18

Kann durch $A(0|0)$, $B(2|2)$, $C(4|4)$ ein Umkreis eines Dreiecks bestimmt werden? Begründen Sie durch die Mittelsenkrechten.

Можно ли найти описанную окружность треугольника $A(0|0)$, $B(2|2)$, $C(4|4)$? Обоснуйте через серединные перпендикуляры.

$AB=(2|2)$ и $AC=(4|4)$ зависимы: точки коллинеарны, невырожденного треугольника нет.

Серединный перпендикуляр AB : $x+y=2$. Для BC середина $(3|3)$, поэтому $x+y=6$.

Прямые параллельны и различны; равноудалённой от трёх точек точки O нет, описанная окружность не существует.

Проверка. Система $x+y=2$ и $x+y=6$ противоречива.

Где легко ошибиться. Формулы центров треугольника требуют сначала проверить невырожденность.

Повторить: Четыре центра начинаются с четырёх определений.