

Задачи с параметром: объяснение

demidmath.com · Telegram: @demidmath

У функции $f_a(x) = x^2 + a$ при $a = -4$ два нуля: -2 и 2 . При $a = 0$ остаётся один нуль, а при $a = 3$ нулей нет. Формула одна, но ответ меняется вместе с a .

Буква a — параметр (Parameter): выбранное число, которое фиксирует один график. Аргумент x меняется внутри этого графика. Сначала решаем обычную задачу при фиксированном a , затем выясняем, какие значения a требуют отдельного случая.

Что фиксируется при вычислении производной

Семейство функций называют Funktionenschar. Например, при $a = 3$ из $f_a(x) = ax^3 - 2a$ получается $f_3(x) = 3x^3 - 6$. Можно сначала выбрать a , а можно вычислить производную для всего семейства: $f'_a(x) = 3ax^2$. В обоих случаях $f'_3(2) = 36$.

Производную берём по x , поэтому a и выражения a^2 , $\sin(a)$, e^a считаются постоянными. Получаем $(a^2x)' = a^2$, $(x-a)' = 1$ и $(-2a)' = 0$. Параметр подставляем в конце, если условие ещё не задаёт его значение.

Для наклона m в точке с абсциссой x_0 записываем $f'_a(x_0) = m$. У $f_a(x) = ax^2 + x$ наклон при $x = 2$ равен $4a + 1$. Если он должен быть 5 , то $a = 1$. Проверка: производная $x^2 + x$ при $x = 2$ действительно равна 5 .

Область определения проверяем до сокращения

У $f_a(x) = 1/(x-a) + 2$ при любом вещественном a запрещено $x = a$. Это область определения (Definitionsmenge) $D_a = \mathbb{R} \setminus \{a\}$. При $x \rightarrow a$ дробь неограниченно возрастает по модулю, поэтому $x = a$ — вертикальная асимптота.

Сокращение может скрыть запрет. Выражение $(x^2 - a^2)/(x - a)$ равно $x + a$ только при $x \neq a$. Исходный график — прямая с выколотой точкой $(a|2a)$. Предел при $x \rightarrow a$ конечен и равен $2a$; вертикальной асимптоты здесь нет.

Под корнем чётной степени требуется неотрицательное выражение. Для $\sqrt{x+a}$ допустимы $x \geq -a$. Производная $1/(2\sqrt{x+a})$ существует при $x > -a$. Если ищем конечный наклон в x_0 , проверяем более строгое неравенство $x_0 + a > 0$.

Особое значение нельзя потерять при делении

В $ax = a$ хочется сократить a . При $a \neq 0$ это даёт $x = 1$. При $a = 0$ исходное равенство превращается в $0 = 0$, и подходит любое вещественное x . Сокращение без оговорки потеряло бы целый случай.

Та же проверка нужна перед формулой квадратного уравнения. У $ax^2 - 2x = 0$ при $a = 0$ остаётся линейное уравнение $-2x = 0$. При $a \neq 0$ вынесем x : $x(ax - 2) = 0$, откуда $x = 0$ или $x = 2/a$. Делить исходное уравнение на x нельзя: так потеряется нулевой корень.

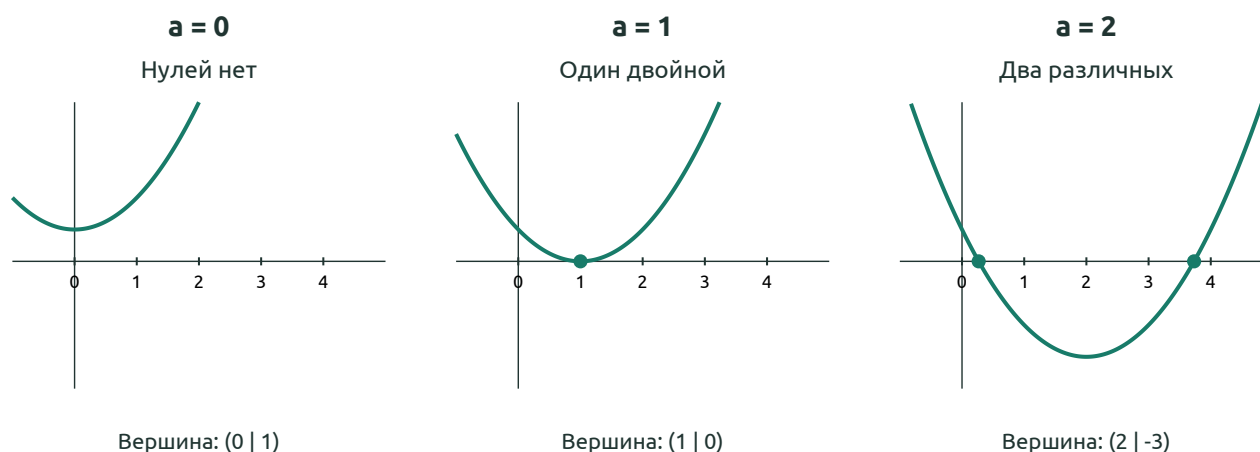
Отдельные случаи отмечаем по конкретным причинам: знаменатель мог обратиться в нуль, старший коэффициент исчез, знак под корнем изменился. После решения возвращаем найденные значения в исходное условие.

Как меняется число действительных корней

Для $Ax^2+Bx+C=0$ при $A \neq 0$ дискриминант $\Delta=B^2-4AC$ определяет число различных действительных корней: $\Delta > 0$ — два, $\Delta = 0$ — один двойной, $\Delta < 0$ — ни одного. Случай $A=0$ исследуем отдельно, даже если формула Δ по-прежнему вычисляется.

У $x^2-2ax+1=0$ старший коэффициент всегда равен 1. Здесь $\Delta=4(a^2-1)$. При $|a|>1$ нули $x=a \pm \sqrt{a^2-1}$; при $a=\pm 1$ один двойной нуль $x=a$; при $|a|<1$ нулей нет.

Удобно проверить ответ через вершину: $x^2-2ax+1=(x-a)^2+1-a^2$. Ветви направлены вверх. Вершина выше оси при $|a|<1$, на оси при $|a|=1$, ниже оси при $|a|>1$. Это независимо подтверждает случаи, найденные по Δ .



Графики $x^2-2ax+1$ при $a=0$, $a=1$ и $a=2$: нулей нет, один двойной нуль, два различных нуля. Кружками отмечены нули.

Наклон и касание дают разные условия

Waagrechte Tangente означает $f'_a(x_0)=0$. Высота точки при этом может быть любой. Например, у x^2-4x+1 горизонтальная касательная проходит через (2|-3), а не через ось x .

Berührt die x -Achse означает, что точка находится на оси и касательная горизонтальна: $f_a(x_0)=0$ и $f'_a(x_0)=0$. В семействе $x^2-2ax+4$ второе равенство даёт $x_0=a$, а первое — $4-a^2=0$. Получаются $a=2$, $x_0=2$ или $a=-2$, $x_0=-2$. Подстановка даёт $(x-2)^2$ и $(x+2)^2$: обе параболы действительно касаются оси.

Если касательная перпендикулярна прямой с конечным ненулевым наклоном k , её наклон $-1/k$. У прямой $y=-4x+2$ это $1/4$. Для $\sqrt{(x+a)}$ при $x=3$ решаем $1/(2\sqrt{(3+a)})=1/4$, получаем $a=1$ и проверяем $3+a>0$.

Стационарная точка может перестать быть экстремумом

У $f_a(x)=x^3-3ax$ производная $3(x^2-a)$. При $a<0$ она положительна для всех x : экстремумов нет. При $a>0$ стационарные точки $x=\pm\sqrt{a}$; знак f' последовательно $+$, $-$, $+$. Поэтому слева максимум, справа минимум.

При $a=0$ функция равна x^3 . Производная $3x^2$ обращается в нуль при $x=0$, но остаётся положительной с обеих сторон. Точка $(0|0)$ — стационарный перегиб, не экстремум. Одного равенства $f'=0$ недостаточно.

Если надо найти параметры по экстремуму $E(x_0|y_0)$, используем и высоту $f(x_0)=y_0$, и наклон $f'(x_0)=0$. Затем проверяем максимум или минимум по смене знака производной либо по ненулевой второй производной.

Целый показатель и направление бесконечности

При $x \rightarrow -\infty$ основание $x-2$ отрицательно. Если a — положительное чётное целое, то $(x-2)^a \rightarrow +\infty$; если положительное нечётное — к $-\infty$. Прибавление 1 не меняет эти бесконечные пределы.

Случай $a=-1$ рассматриваем отдельно: $(x-2)^{-1}+1=1/(x-2)+1$, поэтому предел равен 1. Отрицательная степень означает обратную величину. Она не означает минус перед степенью. Для произвольного вещественного a отрицательное основание может быть недопустимо, поэтому чётность обсуждаем только для целых показателей.

Параметр в границах интеграла

Пусть $a>0$ и $f_a(x)=a-x^2$. Ограниченная с осью x область лежит между нулями $-\sqrt{a}$ и $\sqrt{a}$; на этом промежутке $f_a \geq 0$. Площадь равна интегралу функции: $A(a)=\int$ от $-\sqrt{a}$ до $\sqrt{a}$ $(a-x^2) dx$.

По симметрии $A(a)=2\int$ от 0 до $\sqrt{a}$ $(a-x^2) dx=2[a \cdot x - x^3/3]$ от 0 до $\sqrt{a}=(4/3)a\sqrt{a}$. Пределы тоже зависят от a : нельзя заменить их фиксированными числами до определения параметра. При $a=0$ ограниченная область вырождается, при $a<0$ пересечений с осью нет.

Почему в первообразной возникает отдельный случай

Для $x>0$ рассмотрим $\int x^m \ln(x) dx$. При $m \neq -1$ можно интегрировать по частям: $u=\ln(x)$, $dv=x^m dx$, $du=dx/x$ и $v=x^{m+1}/(m+1)$. Получаем $x^{m+1}[\ln(x)/(m+1)-1/(m+1)^2]+C$.

При $m=-1$ этот вывод неприменим: в нём было деление на $m+1$. В исходном интеграле остаётся $\ln(x)/x$. Замена $t=\ln(x)$, $dt=dx/x$ даёт $t^2/2+C=(\ln(x))^2/2+C$. Проверяем каждую формулу дифференцированием на $x>0$.