Задачи с параметром: разборы

demidmath.com · Telegram: @demidmath

Сверяй после собственной попытки. Номера совпадают с листом условий; раздел для повторения указан после каждого разбора.

Задача 1

Für $a\in\mathbb{R}$ sei $f_a(x)=ax^3-2a$. Bestimmen Sie die Ableitung nach x und berechnen Sie $f'_3(2)$.

Производная $-2a$ равна нулю, а производная ax^3 равна $3ax^2$. Значит, $f'_a(x)=3ax^2$.

$f'_3(2)=3\cdot3\cdot2^2=36$.

Проверка. Подставим $a=3$ заранее: $f_3(x)=3x^3-6$, $f'_3(x)=9x^2$ и $f'_3(2)=36$.

Где легко ошибиться. Не дифференцируй a как переменную x: это разные роли букв.

Повторить в конспекте: «Что фиксируется при вычислении производной».

Задача 2

Bestimmen Sie die Definitionsmenge der Funktion $f_a(x)=1/(x-a)+2$ und geben Sie die senkrechte Asymptote an. Es gilt $a\in\mathbb{R}$.

$x-a\neq0$ означает $x\neq a$. Поэтому $D_a=\mathbb{R}\setminus\{a\}$.

При $x\to a-$ функция стремится к $-\infty$, а при $x\to a+$ — к $+\infty$. Вертикальная асимптота: $x=a$.

Проверка. При $a=0$ получаем $1/x+2$ с запрещённым $x=0$; при $a=3$ вся картина сдвигается вправо на 3.

Где легко ошибиться. Запрещено значение аргумента $x=a$. Сам параметр a здесь может быть любым вещественным числом.

Повторить в конспекте: «Область определения проверяем до сокращения».

Задача 3

Bestimmen Sie für alle $a\in\mathbb{R}$ die Anzahl und die Lage der reellen Nullstellen von $f_a(x)=x^2+a$.

Если $a<0$, число $-a$ положительно: $x=\pm\sqrt{-a}$, два различных нуля.

При $a=0$ единственный нуль $x=0$ имеет кратность два. При $a>0$ правая часть $-a$ отрицательна, действительных нулей нет.

Проверка. $a=-4$ даёт нули ±2, $a=0$ — нуль 0, $a=3$ — положительную функцию x^2+3.

Где легко ошибиться. Не теряй отрицательный корень и различай один двойной нуль и два различных нуля.

Повторить в конспекте: «Как меняется число действительных корней».

Задача 4

Der Graph von $f_a(x)=ax^2+2$ mit $a\in\mathbb{R}$ soll durch $P(-2|14)$ verlaufen. Bestimmen Sie a.

Подставляем координаты: $a\cdot(-2)^2+2=14$, то есть $4a+2=14$.

$4a=12$, поэтому $a=3$.

Проверка. $f_3(-2)=3\cdot4+2=14$.

Где легко ошибиться. $(-2)^2=4$, а не -4; производная для условия прохождения через точку не нужна.

Повторить в конспекте: «Что фиксируется при вычислении производной».

Задача 5

Lösen Sie $ax=a$ nach x für alle reellen Werte des Parameters a.

При $a\neq0$ делим на a и получаем единственное решение $x=1$.

При $a=0$ исходное равенство $0\cdot x=0$ верно для любого $x\in\mathbb{R}$. Поэтому множество решений в этом случае — $\mathbb{R}$.

Проверка. При $a=0$ подходят и $x=0$, и $x=7$; при $a=2$ равенство $2x=2$ даёт только $x=1$.

Где легко ошибиться. Ответ $x=1$ для всех a пропускает бесконечно много решений при $a=0$.

Повторить в конспекте: «Особое значение нельзя потерять при делении».

Задача 6

Gegeben ist $f_a(x)=ax^2-4x+1$. Bestimmen Sie a so, dass der Graph an der Stelle $x=2$ eine waagrechte Tangente hat. Es gilt $a\in\mathbb{R}$.

$f'_a(x)=2ax-4$. Условие при $x=2$: $4a-4=0$, откуда $a=1$.

Точка касания имеет высоту $f_1(2)=4-8+1=-3$. Касательная — прямая $y=-3$.

Проверка. $f_1(x)=(x-2)^2-3$ имеет вершину $(2|-3)$, $f''_1=2>0$.

Где легко ошибиться. Условие $f_a(2)=0$ означало бы точку на оси x, которой в задаче не требуют.

Повторить в конспекте: «Наклон и касание дают разные условия».

Задача 7

Bestimmen Sie alle reellen Nullstellen von $f_a(x)=ax^2-2x$. Unterscheiden Sie $a=0$ und $a\neq0$.

При $a=0$ получаем $f_0(x)=-2x$ с единственным нулём $x=0$.

При $a\neq0$ равенство $x(ax-2)=0$ даёт $x=0$ или $x=2/a$. Число $2/a$ не равно нулю, поэтому нули различны.

Проверка. Для $a=1$ нули 0 и 2; для $a=-2$ нули 0 и -1. Подстановка в ax^2-2x даёт нуль.

Где легко ошибиться. Формула $2/a$ не определена при $a=0$. Деление на x потеряло бы нуль 0.

Повторить в конспекте: «Особое значение нельзя потерять при делении».

Задача 8

Untersuchen Sie für $a \in \mathbb{R}$ die Anzahl der reellen Nullstellen von $f_a(x)=x^2-2ax+1$ und geben Sie diese an.

$\Delta=(-2a)^2-4=4(a^2-1)$. При $|a|>1$ два нуля: $x=a\pm\sqrt{(a^2-1)}$.

При $a=1$ имеем $(x-1)^2$, один двойной нуль 1. При $a=-1$ имеем $(x+1)^2$, один двойной нуль -1.

При $-1<a<1$ дискриминант отрицателен, действительных нулей нет.

Проверка. Представление $(x-a)^2+1-a^2$ показывает те же случаи по высоте вершины.

Где легко ошибиться. Из $a^2>1$ следует $a<-1$ или $a>1$; отрицательные параметры тоже дают два нуля.

Повторить в конспекте: «Как меняется число действительных корней».

Задача 9

Für $f_a(x)=ax^2+x$ soll die Tangente an der Stelle $x=2$ die Steigung 5 besitzen. Bestimmen Sie a und die Tangentengleichung.

$f'_a(x)=2ax+1$. Из $4a+1=5$ получаем $a=1$.

$f_1(2)=2^2+2=6$, поэтому касательная $y=6+5(x-2)=5x-4$.

Проверка. Прямая проходит через $(2|6)$, её наклон 5 совпадает с $f'_1(2)$. Кроме того $x^2+x-(5x-4)=(x-2)^2$.

Где легко ошибиться. Наклон 5 не является свободным членом касательной. Для него нужна ещё точка $(2|6)$.

Повторить в конспекте: «Что фиксируется при вычислении производной».

Задача 10

Gegeben ist $f_a(x)=(x^2-a^2)/(x-a)$, $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Definitionsmenge und den Grenzwert für $x \to a$. Liegt bei $x=a$ eine senkrechte Asymptote vor?

Исходный знаменатель требует $x \neq a$, поэтому $D_a=\mathbb{R}\setminus\{a\}$.

Для $x \neq a$ имеем $(x-a)(x+a)/(x-a)=x+a$. Следовательно, предел при $x \to a$ равен $2a$.

Предел конечен: вертикальной асимптоты нет. График — прямая $y=x+a$ с выколотой точкой $(a|2a)$.

Проверка. При $x=a+h$, $h \neq 0$ исходная дробь равна $2a+h$ и стремится к $2a$ при $h \to 0$.

Где легко ошибиться. Нулевой знаменатель сам по себе не доказывает асимптоту. После сокращения $x=a$ всё ещё исключено.

Повторить в конспекте: «Область определения проверяем до сокращения».

Задача 11

Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die der Graph von $f_a(x)=x^2-2ax+4$ die x-Achse berührt. Geben Sie die Berührpunkte an.

$f'_a(x)=2x-2a$, поэтому в возможной точке касания $x_0=a$.

$f_a(a)=4-a^2=0$ даёт $a=\pm 2$. При $a=2$ точка $(2|0)$, при $a=-2$ точка $(-2|0)$.

Функции имеют вид $(x-2)^2$ и $(x+2)^2$, поэтому в обеих точках ось действительно является касательной.

Проверка. $\Delta=4a^2-16$ обращается в нуль именно при $a=\pm 2$, что подтверждает двойные нули.

Где легко ошибиться. Равенство $f'_a(x_0)=0$ находит вершину любой параболы семейства. Только условие $f_a(x_0)=0$ выбирает нужные параметры.

Повторить в конспекте: «Наклон и касание дают разные условия».

Задача 12

Gegeben ist $h_a(x)=(x-2)^a+1$, wobei a eine positive ganze Zahl ist. Bestimmen Sie den Grenzwert für $x \to -\infty$ getrennt für gerade und ungerade Werte von a. Untersuchen Sie anschließend den Fall $a=-1$ gesondert.

При положительном чётном a имеем $(x-2)^a \to +\infty$ и $h_a(x) \to +\infty$. При положительном нечётном a оба предела равны $-\infty$.

Отдельно $a=-1$: $h_{-1}(x)=1/(x-2)+1$, область определения $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. При $x \to -\infty$ дробь стремится к 0 снизу, поэтому $h_{-1}(x) \to 1$.

Проверка. При $x=-100$: $h_2=10405$, $h_3=-1061207$, $h_{-1}=101/102 \approx 0{,}9902$. Эти значения согласуются с направлениями пределов.

Где легко ошибиться. $a=-1$ не входит в случай положительного нечётного показателя; отрицательная степень означает дробь.

Повторить в конспекте: «Целый показатель и направление бесконечности».

Задача 13

Für $a \in \mathbb{R}$ sei $f_a(x)=\sqrt{(x+a)}$. Die Tangente an der Stelle $x=3$ soll senkrecht zur Geraden $y=-4x+2$ sein. Bestimmen Sie a, die Definitionsmenge und die Tangentengleichung.

У заданной прямой наклон -4, поэтому наклон касательной $1/4$. Производная $f'_a(x)=1/(2\sqrt{(x+a)})$ определена при $x>-a$.

В $x=3$: $1/(2\sqrt{(3+a)})=1/4$. Отсюда $\sqrt{(3+a)}=2$, $3+a=4$ и $a=1$.

$D_1=[-1;+\infty)$. Точка касания $(3|2)$, поэтому $y=2+(x-3)/4=x/4+5/4$.

Проверка. $3+1=4>0$, $f'_1(3)=1/4$, произведение наклонов $(-4)\cdot(1/4)=-1$. В $x=3$ касательная имеет высоту 2.

Где легко ошибиться. Перпендикулярность не означает просто смену знака наклона. Граница $x=-a$ входит в область функции, но не в область её конечной производной.

Повторить в конспекте: «Наклон и касание дают разные условия».

Задача 14

Untersuchen Sie $f_a(x)=x^3-3ax$ für alle $a\in\mathbb{R}$ auf stationäre Stellen und lokale Extrempunkte. Bestimmen Sie die Koordinaten und behandeln Sie $a=0$ ausdrücklich.

$f'_a(x)=3(x^2-a)$. При $a<0$ выражение x^2-a положительно, стационарных точек и локальных экстремумов нет.

При $a=0$ имеем $f_0=x^3$. В $x=0$ производная равна нулю, но её знак с обеих сторон положителен. Это стационарный перегиб $(0|0)$, не экстремум.

При $a>0$ стационарные абсциссы $\pm\sqrt{a}$. Знаки f': + на $(-\infty;-\sqrt{a})$, − на $(-\sqrt{a};\sqrt{a})$, + на $(\sqrt{a};+\infty)$.

Максимум $H(-\sqrt{a}|2a\sqrt{a})$, минимум $T(\sqrt{a}|-2a\sqrt{a})$. Их высоты получены подстановкой в x^3-3ax.

Проверка. $f''_a(x)=6x$: при $x=-\sqrt{a}$ она отрицательна, при $x=\sqrt{a}$ положительна. Для $a=1$ точки $H(-1|2)$, $T(1|-2)$.

Где легко ошибиться. Два совпавших решения $x=\pm0$ при $a=0$ не дают максимум и минимум. Нужна проверка знака производной.

Повторить в конспекте: «Стационарная точка может перестать быть экстремумом».

Задача 15

Für $a,b\in\mathbb{R}$ sei $f(x)=x+a+b/x$ mit $x\neq0$. Der Graph soll in $T(2|5)$ ein lokales Minimum haben. Bestimmen Sie a und b sowie alle weiteren lokalen Extrempunkte.

$f'(x)=1-b/x^2$. Условие $f'(2)=0$ даёт $1-b/4=0$, поэтому $b=4$.

Из $f(2)=2+a+4/2=5$ находим $a=1$. Получаем $f(x)=x+1+4/x$, $x\neq0$.

Стационарные точки: $1-4/x^2=0$, то есть $x=\pm2$. Вторая производная $f''(x)=8/x^3$.

При $x=2$ имеем $f''=1>0$ и $f(2)=5$, минимум подтверждён. При $x=-2$ имеем $f''=-1<0$ и $f(-2)=-3$: второй экстремум — максимум $H(-2|-3)$.

Проверка. На положительной полуоси $x+4/x\geq4$, значит $f\geq5$ с равенством в $x=2$. На отрицательной полуоси подстановка $x=-t$, $t>0$, даёт $f=1-(t+4/t)\leq-3$.

Где легко ошибиться. Решив $f'(2)=0$, ещё нельзя забыть высоту 5 или объявить минимум без проверки. Точка $x=0$ не принадлежит графику.

Повторить в конспекте: «Стационарная точка может перестать быть экстремумом».

Задача 16

Für a>0 begrenzen der Graph von $f_a(x)=a-x^2$ und die x-Achse eine Fläche. Bestimmen Sie A(a). Für welchen Wert von a beträgt der Flächeninhalt 36 Flächeneinheiten?

Нули: $x=\pm\sqrt{a}$. Между ними $a-x^2\geq 0$.

$A(a)=2\int$ от 0 до $\sqrt{a}$ $(a-x^2)\,dx=2[a\cdot x-x^3/3]$ от 0 до $\sqrt{a}=(4/3)a\sqrt{a}$.

Из $A=36$ получаем $a\sqrt{a}=27$. Пусть $t=\sqrt{a}>0$; тогда $t^3=27$, $t=3$ и $a=9$.

Для найденной функции $y=9-x^2$ границы области $x=-3$ и $x=3$.

Проверка. $2\int$ от 0 до 3 $(9-x^2)\,dx=2(27-9)=36$. Положительный кубический корень единственен.

Где легко ошибиться. Границы зависят от параметра. Нельзя интегрировать от $-a$ до a: нули равны $\pm\sqrt{a}$.

Повторить в конспекте: «Параметр в границах интеграла».

Задача 17

Bestimmen Sie für alle $a\in\mathbb{R}$ die Anzahl der verschiedenen reellen Lösungen von $ax^2-2(a+1)x+a=0$. Geben Sie die Lösungen an und begründen Sie, warum der Fall a=0 vor der quadratischen Lösungsformel zu prüfen ist.

При $a=0$ остаётся $-2x=0$: единственное решение $x=0$.

При $a\neq 0$ дискриминант $\Delta=4[(a+1)^2-a^2]=4(2a+1)$. Если $a<-1/2$, действительных решений нет.

При $a=-1/2$ дискриминант нулевой: $x=(a+1)/a=-1$, один двойной корень.

При $a>-1/2$ и $a\neq 0$ два различных решения: $x=[a+1\pm\sqrt{(2a+1)}]/a$. Эти случаи вместе с $a=0$ исчерпывают все вещественные параметры.

Проверка. Для $a=-1$ уравнение $-x^2-1=0$ не имеет вещественных корней; для $a=-1/2$ получаем $-(x+1)^2/2=0$. Для $a=1$ корни $2\pm\sqrt{3}$ имеют сумму 4 и произведение 1, как требует $x^2-4x+1=0$.

Где легко ошибиться. При $a=0$ дискриминант положителен, но уравнение линейное. Правило «$\Delta>0$ — два корня» здесь неприменимо.

Повторить в конспекте: «Особое значение нельзя потерять при делении».

Задача 18

Bestimmen Sie für x>0 eine Stammfunktion von $f_m(x)=x^m\ln(x)$ für alle $m\in\mathbb{R}$. Behandeln Sie m=−1 gesondert und prüfen Sie beide Formeln durch Ableiten.

Для $m\neq -1$: $u=\ln(x)$, $du=dx/x$, $v=x^{m+1}/(m+1)$. По частям получаем $x^{m+1}\ln(x)/(m+1)-[1/(m+1)]\int x^m\,dx$.

Следовательно, $F_m(x)=x^{m+1}[\ln(x)/(m+1)-1/(m+1)^2]+C$ при $m\neq -1$.

При $m=-1$ положим $t=\ln(x)$, $dt=dx/x$. Тогда $\int\ln(x)/x\,dx=\int t\,dt=(\ln(x))^2/2+C$.

Проверка первой формулы: производная произведения равна $x^m[\ln(x)-1/(m+1)]+x^m/(m+1)=x^m\ln(x)$. Производная второй: $(\ln(x))\cdot 1/x$. Обе проверки выполнены на $x>0$.

Проверка. При $m=0$ первая формула даёт $x\ln(x)-x+C$; при $m=1$ — $x^2\ln(x)/2-x^2/4+C$. Их производные $\ln(x)$ и $x\ln(x)$. Для $m=-1$ формула с делением на $m+1$ не используется.

Где легко ошибиться. Подстановка $m=-1$ в формулу первого случая приводит к делению на нуль. Особый параметр исследуют в исходном интеграле.

Повторить в конспекте: «Почему в первообразной возникает отдельный случай».