

Июнь 2026: полный разбор

demidmath.com · Telegram: @demidmath

Это учебная редакция варианта VGUN от 23.06.2026, Gruppe B. Немецкие требования сверены с печатной транскрипцией. Допущения и расхождения источника указаны непосредственно у заданий 1, 3, 5, 7 и 8. Официальные баллы и длительность по имеющимся фотографиям не установлены.

Задача 1 · Urlaub: вероятность и целочисленная граница

55% der Bevölkerung hatten den Urlaub im Inland verbracht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 5 zufällig ausgewählten Personen ...

55% населения провели отпуск внутри страны. Найди вероятности указанных событий при случайном выборе людей.

Для расчёта принимается независимая биномиальная модель с неизменной долей. Нормальное приближение объяснено дополнительно; печатное условие не требует двух способов одновременно.

a) ... alle 5 Personen den Urlaub im Inland verbracht hatten?

Какова вероятность, что все пять отдыхали внутри страны?

В используемой модели выборы независимы, вероятность отпуска внутри страны для каждого человека равна 0,55.

$P(\text{все пять внутри страны}) = 0,55^5 = 0,0503284375 \approx 5,03284\%$.

Проверка. Вероятность меньше 0,55: потребовать пять успехов подряд труднее, чем один.

Где легко ошибиться. Не заменяй произведение вероятностей суммой.

b) ... mindestens eine Person den Urlaub im Ausland verbracht hatte?

Какова вероятность, что хотя бы один из пяти отдыхал за границей?

«Никто за границей» означает, что все пять отдыхали внутри страны.

$P(\text{хотя бы один за границей}) = 1 - 0,55^5 = 0,9496715625 \approx 94,96716\%$.

Проверка. Вероятности а и б в сумме дают ровно 1.

Где легко ошибиться. «Хотя бы один» включает также двух, трёх, четырёх и пятерых.

c) Wie viele Leute müssen Sie mindestens befragen, damit Sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99,9% mindestens eine Person finden werden, die ihren Urlaub im Ausland verbracht hatte?

Каково минимальное число опрошенных, чтобы вероятность встретить хотя бы одного отдохавшего за границей была не меньше 99,9%?

$1 - 0,55^n \geq 0,999 \Leftrightarrow 0,55^n \leq 0,001$. Логарифм возрастает, поэтому $n \cdot \ln(0,55) \leq \ln(0,001)$.

При делении на отрицательный $\ln(0,55)$ знак меняется: $n \geq \ln(0,001)/\ln(0,55) \approx 11,5546$.

Минимальное целое число $n=12$. Проверка соседних целых: при $n=11$ вероятность $\approx 0,9986068766 < 0,999$; при $n=12 \approx 0,9992337821 \geq 0,999$.

Проверка. Вероятность $1 - 0,55^n$ растёт с n , поэтому проверка соседей подтверждает минимальность.

Где легко ошибиться. Округляй вверх и проверяй исходное неравенство; обычное округление не объясняет минимальность.

d) Es werden 300 Personen befragt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als die Hälfte von ihnen den Urlaub im Ausland verbracht hatte.

Среди 300 опрошенных найди вероятность, что больше половины отдыхали за границей.

$X \sim B(300; 0,45)$. Строго больше половины: $X > 150$, то есть $X \geq 151$.

В биномиальной модели $P(X \geq 151) = \sum$ от $k=151$ до 300

$C(300, k) \cdot 0,45^k \cdot 0,55^{300-k} \approx 0,03627756 \approx 3,62776\%$. Это конечная точная сумма; десятичное значение округлено.

Учебное дополнение: нормальное приближение с поправкой на непрерывность. $\mu = np = 135$, $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{74,25}$. Граница непрерывного правого хвоста равна 150,5.

$P(X \geq 151) \approx 1 - \Phi((150,5 - 135)/\sqrt{74,25}) \approx 0,03602497 \approx 3,60250\%$. Это приближение, и оно не обязано совпадать с биномиальной суммой. Оригинал не требует обязательно предъявить оба способа.

Проверка. $\mu = 135$ меньше порога 151; вычисляется небольшой правый хвост. Условия $np = 135$ и $n(1-p) = 165$ позволяют разумное нормальное приближение.

Где легко ошибиться. Не включай $X = 150$ и не путай функцию Φ , которая даёт левый хвост, с нужным правым.

Повторить

Биномиальное распределение

Нормальное приближение и границы

Задача 2 • Zerfall: одна точная модель

Ein radioaktives Isotop hat eine Halbwertszeit von 12,26 Jahren.

Радиоактивный изотоп имеет период полураспада 12,26 года.

a) Berechnen Sie die Zerfallskonstante λ und geben Sie das dazugehörige Zerfallsgesetz an.

Найди постоянную распада λ и закон распада.

Пусть t измеряется в годах, $m_0 > 0$, $t \geq 0$. По закону $m(t) = m_0 e^{(-\lambda t)}$ условие полураспада даёт $e^{(-12,26\lambda)} = 1/2$.

$\lambda = \ln(2)/12,26 \approx 0,05653729042$ год⁻¹. Закон: $m(t) = m_0 e^{(-[\ln(2)/12,26]t)} = m_0 \cdot 2^{(-t/12,26)}$.

Если вместо этого писать $m(t) = m_0 e^{(kt)}$, коэффициент $k = -\lambda$ отрицателен. Знак зависит от выбранной записи закона.

Проверка. $m(12,26) = m_0 \cdot 2^{-1} = m_0/2$.

Где легко ошибиться. Не ставь одновременно отрицательную постоянную и дополнительный минус в показателе.

b) Wie viel g sind nach 60 Jahren noch vorhanden, wenn es zu Beginn 66,2g waren?

Сколько граммов останется через 60 лет от начальных 66,2 г?

$m(60) = 66,2 \cdot 2^{(-60/12,26)} \approx 2,22652715$ г.

Через 60 лет останется примерно 2,23 г. Постоянную до конечного ответа не округляем.

Проверка. 60 лет — немного меньше пяти периодов; результат немного больше $66,2/32 = 2,06875$ г.

Где легко ошибиться. Не округляй число периодов до целого.

c) Nach wie vielen Jahren sind nur noch 12,3% der ursprünglichen Menge vorhanden?

Через сколько лет останется только 12,3% начального количества?

$m(t)/m_0 = 0,123$, поэтому $e^{(-\lambda t)} = 0,123$.

$t = -\ln(0,123)/\lambda = -12,26 \cdot \ln(0,123)/\ln(2) \approx 37,06528749$ года.

Примерно через 37,07 года останется 12,3% начальной массы.

Проверка. За три периода, 36,78 года, остаётся 12,5%; для 12,3% требуется немного больше времени.

Где легко ошибиться. Остаток 12,3% не означает уменьшение на 12,3%.

Повторить

Рост и распад

Задача 3 • Dreieck: высота, отражение и две окружности

Die Punkte $A(-5|-4)$, $B(2|0)$, $C(-1|2)$ bilden ein Dreieck.

Точки $A(-5|-4)$, $B(2|0)$, $C(-1|2)$ образуют треугольник.

В d напечатаны отдельные запасные данные. Основной круг и Ersatzangabe разобраны отдельно, с указанием выбранного пути.

a) Berechnen Sie die Länge der Höhe h_c und stellen Sie die Geradengleichung der Höhenlinie h_c in Normalform auf.

Найди длину высоты из C к AB и уравнение прямой высоты в нормальной форме.

$AB = (7|4)$, $|AB| = \sqrt{65}$. Сторона AB: $4x - 7y = 8$.

Высота проходит через C и перпендикулярна AB, поэтому $(7|4) \cdot ((x|y) - (-1|2)) = 0$. Получаем $7x + 4y = 1$.

Длина высоты $h_c = |4 \cdot (-1) - 7 \cdot 2 - 8| / \sqrt{(4^2 + (-7)^2)} = 26 / \sqrt{65} \approx 3,22490$ LE.

Проверка. $(7|4) \cdot (4|-7) = 0$; точка C удовлетворяет $7x + 4y = 1$.

Где легко ошибиться. Длина высоты — число; прямая высоты — уравнение. В условии нужны оба результата.

b) Spiegeln Sie den Punkt C an der Geraden $g[A; B]$ und berechnen Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes C' .

Отрази C относительно прямой AB и найди C' .

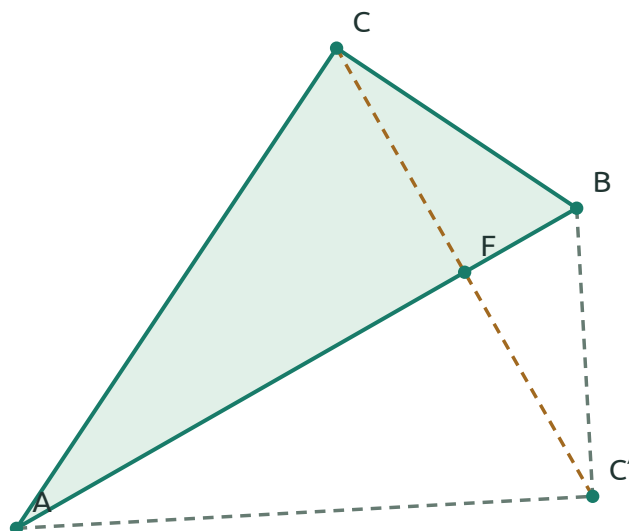
Система $4x - 7y = 8$, $7x + 4y = 1$ даёт $F = (3/5|-4/5)$. Например, после умножения первого уравнения на 4 и второго на 7 сложение даёт $65x = 39$.

$C' = 2F - C = (6/5|-8/5) - (-1|2) = (11/5|-18/5)$.

Проверка. F лежит на AB; $(C-F) \cdot AB = 0$; середина C и C' равна F.

Где легко ошибиться. Формула $C - 2F$ даёт другой вектор: порядок в $2F - C$ существенен.

К задаче 3(b): отражение через высоту



Основание F лежит на AB; C и C' симметричны относительно этой прямой. Масштабы осей одинаковы.

c) Berechnen Sie den Umkreismittelpunkt U des Dreiecks ABC und stellen Sie die Gleichung des Umkreises k auf.

Найди центр U и уравнение описанной окружности.

Пусть $U=(u|v)$. Серединный перпендикуляр AB: $7u+4v=-37/2$. Для AC, направление которого $(4|6)$, получаем $2u+3v=-9$.

Умножим первое уравнение на 3, второе на 4 и вычтем: $13u=-39/2$. Значит $U=(-3/2|-2)$.

$R^2=UA^2=(-7/2)^2+(-2)^2=65/4$. Окружность k: $(x+3/2)^2+(y+2)^2=65/4$.

Проверка. Подстановка каждой из A, B и C в левую часть даёт $65/4$.

Где легко ошибиться. В правой части уравнения окружности стоит R^2 , а не R.

d) Stellen Sie die Gleichung der Tangente an den Umkreis k im Punkt P($-2|y<0$) auf. [Ersatzangabe Umkreis: $(x+2,5)^2+(y+3)^2=16,25$]

Найди касательную в точке P($-2|y<0$). Можно продолжить по окружности из с либо отдельно использовать напечатанную Ersatzangabe $(x+2,5)^2+(y+3)^2=16,25$.

Ветвь 1 — окружность, вычисленная в с. При $x=-2$: $1/4+(y+2)^2=65/4$, откуда $y=2$ или $y=-6$. Условие $y<0$ выбирает P($-2|-6$).

Радиус UP($-1/2|-4$). Уравнение касательной: $(-1/2)(x+2)-4(y+6)=0$, то есть $x+8y+50=0$.

Ветвь 2 — отдельная Ersatzangabe. Её центр U_E($-5/2|-3$), $R_E^2=65/4$. При $x=-2$ имеем $(y+3)^2=16$; отрицательная ордината $y=-7$ даёт P_E($-2|-7$).

Радиус U_EP_E($1/2|-4$). Теперь $(1/2)(x+2)-4(y+7)=0$, то есть $x-8y-54=0$.

Это две разные модели с разными точками касания. Запасные данные позволяют продолжить следующий пункт; само расхождение не доказывает опечатку. В работе напиши: «Mit dem in c) berechneten Kreis ...» либо «Mit der Ersatzangabe ...».

Проверка. В каждой ветви точка принадлежит своей окружности и касательной. Направления $(8|-1)$ и $(8|1)$ соответственно перпендикулярны радиусам.

Где легко ошибиться. Не соединяй центр запасной окружности с точкой P из основной ветви.

e) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

Найди площадь треугольника ABC.

$F=|AB|\cdot h_c/2=\sqrt{65}\cdot(26/\sqrt{65})/2=13$ FE.

Независимо: $AB=(7|4)$, $AC=(4|6)$, поэтому $F=|7\cdot6-4\cdot4|/2=|26|/2=13$ FE.

Проверка. Два разных способа дают одну площадь; отражённый треугольник имеет ту же площадь.

Где легко ошибиться. Для площади нужен модуль определителя и множитель $1/2$.

Повторить

Векторы 2D, прямые и отражение

Особые точки и окружность

Задача 4 • Raum: направления, плоскость и расстояние

Gegeben sind die Punkte $A(3|-2|1)$, $B(-1|4|3)$, $C(x_C|8|z_C)$ und die Gerade $g[R(3|5|-2), S(4|3|-3)]$.

Даны $A(3|-2|1)$, $B(-1|4|3)$, $C(x_C|8|z_C)$; прямая g проходит через $R(3|5|-2)$ и $S(4|3|-3)$.

a) Geben Sie die Gleichung der Geraden g an.

Запиши уравнение прямой g .

$$S-R=(1|-2|-1).$$

$$g: X=(3|5|-2)+t(1|-2|-1), t \in \mathbb{R}.$$

Проверка. $t=0$ даёт R , $t=1$ даёт S .

Где легко ошибиться. Один параметр действует одновременно во всех координатах.

b) Berechnen Sie die Koordinaten x_C und z_C so, dass der Punkt C auf der Geraden g liegt.

Найди x_C и z_C при условии $C \in g$.

$$5-2t=8 \Rightarrow t=-3/2.$$

$$x_C=3+t=3/2; z_C=-2-t=-1/2. \text{ Поэтому } C=(3/2|8|-1/2).$$

Проверка. Все три координаты получаются при одном $t=-3/2$.

Где легко ошибиться. Нельзя выбирать новый параметр для каждой координаты.

c) Die Gerade g und der Punkt B legen eine Ebene ε fest. Berechnen Sie die Gleichung von ε in Normalform.

Найди нормальную форму плоскости ε , заданной прямой g и точкой B .

Векторы $v=(1|-2|-1)$ и $R-B=(4|1|-5)$ независимы, поэтому задают плоскость.

$$n=v \times (R-B)=(11|1|9). \text{ Плоскость: } n \cdot (X-R)=0.$$

$$\text{После подстановки } R: 11x+y+9z=33+5-18=20.$$

Проверка. $n \cdot v=11-2-9=0$, $n \cdot (R-B)=44+1-45=0$; B , R и S удовлетворяют уравнению.

Где легко ошибиться. Нормаль не является направлением прямой g .

d) Bestimmen Sie alle Punkte P auf der x-Achse so, dass das Dreieck ABP rechtwinklig ist, mit rechtem Winkel bei P.

Найди все точки P на оси x, для которых треугольник ABP прямоугольный именно в P.

$$PA = (3-p|-2|1), PB = (-1-p|4|3).$$

$$PA \cdot PB = (3-p)(-1-p) - 8 + 3 = p^2 - 2p - 8 = (p-4)(p+2).$$

Следовательно, $P_1 = (4|0|0)$ и $P_2 = (-2|0|0)$. Оба вектора PA и PB ненулевые в обеих точках, так что получены невырожденные треугольники.

Проверка. Подстановка $p=4$ и $p=-2$ даёт нулевое скалярное произведение; квадратное уравнение не имеет других корней.

Где легко ошибиться. Угол в P не задаётся равенством $AB \cdot AP = 0$: оно описывает угол в A.

e) Begründen Sie mathematisch und in Worten, dass die beiden Geraden $h[P_1(5|7|-1), P_2(8|13|8)]$ und $i[Q_1(-1|-1|0), Q_2(3|7|12)]$ parallel sind. Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden h und i.

Объясни математически и словами параллельность h через $P_1(5|7|-1)$, $P_2(8|13|8)$ и i через $Q_1(-1|-1|0)$, $Q_2(3|7|12)$. Найди расстояние.

$$P_2 - P_1 = (3|6|9) = 3v \text{ и } Q_2 - Q_1 = (4|8|12) = 4v, \text{ где } v = (1|2|3). \text{ Направления пропорциональны.}$$

Проверим совпадение: $Q_1 = P_1 + tv$ потребовало бы $t = -6$ из x, но $t = -4$ из y. Значит прямые различны. Словами: «Die Richtungsvektoren sind parallel; die Geraden sind verschieden und daher echt parallel.»

$$w = Q_1 - P_1 = (-6|-8|1), w \cdot v = -19, |v|^2 = 14. \text{ Перпендикулярная компонента } w_{\perp} = w - [(w \cdot v)/|v|^2]v = (-65/14|-37/7|71/14).$$

$$d^2 = |w_{\perp}|^2 = |w|^2 - (w \cdot v)^2 / |v|^2 = 101 - 361/14 = 1053/14. \text{ Поэтому } d = \sqrt{1053/14} \approx 8,67262 \text{ LE.}$$

Альтернативно $w \times v = (-26|19|-4)$, и $d = |w \times v|/|v| = \sqrt{1053}/\sqrt{14}$. Это площадь параллелограмма, делённая на его основание.

Проверка. $w_{\perp} \cdot v = 0$. Для любых точек прямых квадрат расстояния равен $|w_{\perp}|^2$ плюс квадрат продольной компоненты; последнюю можно сделать нулевой. Поэтому найден именно минимум.

Где легко ошибиться. Одной пропорциональности направлений недостаточно, чтобы отличить совпадающие прямые от различных параллельных.

Повторить

Векторы 3D, плоскости и расстояния

Задача 5 • Wurzelfunktion: график и кольцевые сечения

Gegeben sind die beiden Funktionen $f(x)=\frac{1}{2}(4-x)\sqrt{x}$ und $g(x)=1,5x^2$.

Даны функции $f(x)=\frac{1}{2}(4-x)\sqrt{x}$ и $g(x)=1,5x^2$.

Масштаб напечатан в b. В с отдельная единица не названа: ответ дан в VE, перевод в см³ оговорён условием того же масштаба.

a) Geben Sie die Definitionsmenge und Nullstellen von f an.

Найди область определения и нули f.

$D_f=[0;+\infty)$.

$f(x)=0$ при $x=0$ и $x=4$. Обе точки входят в область определения.

Проверка. $f(0)=f(4)=0$; отрицательные x не входят в вещественную область функции.

Где легко ошибиться. Не исключай $x=0$ из области только потому, что формула производной там не определена.

b) Berechnen Sie alle Extrema und Wendepunkte der Funktion f und stellen Sie f in einem Koordinatensystem graphisch dar für $x\in[0;5]$ und $E_x=E_y=2\text{cm}$.

Найди все экстремумы и перегибы f. Изобрази f на $[0;5]$ в масштабе 2 см на единицу по обеим осям.

Для $x>0$: $f'(x)=x^{-1/2}-(3/4)x^{1/2}=(4-3x)/(4\sqrt{x})$.

f' положительна на $(0;4/3)$ и отрицательна на $(4/3;+\infty)$. Глобальный максимум $H=(4/3|8/(3\sqrt{3}))\approx(1,33333|1,53960)$.

$f''(x)=-(4+3x)/(8x^{3/2})<0$ при $x>0$, поэтому перегибов нет.

В $x=0$ конечной производной нет: $[f(h)-f(0)]/h=(4-h)/(2\sqrt{h})\rightarrow+\infty$ при $h\rightarrow0+$. Справа вблизи нуля $f(h)>0=f(0)$, значит $(0|0)$ — односторонний локальный минимум относительно D_f .

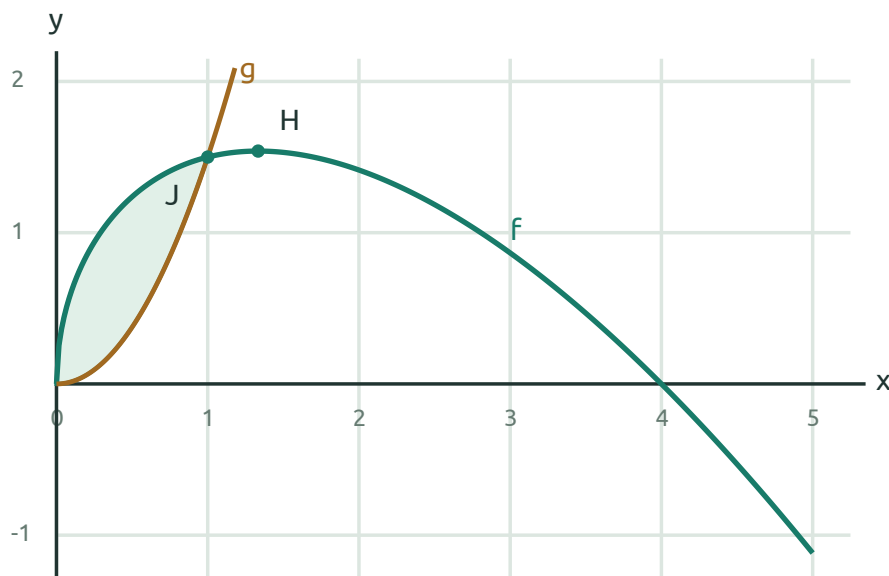
При $x\rightarrow+\infty$ функция стремится к $-\infty$, поэтому глобального минимума на D_f нет. На отдельном отрезке рисунка $[0;5]$ минимальное значение достигается в $x=5$ и равно $-\sqrt{5}/2$. Это граница ограничения, а не новый внутренний экстремум исходной функции.

Для эскиза отметить $(0|0)$, $(1|1,5)$, H , $(4|0)$, $(5|-\sqrt{5}/2)$; график вогнут на $x>0$. Масштаб построения: 1 LE=2 см на обеих осях.

Проверка. Знак f' подтверждает рост и убывание, а постоянный знак f'' исключает перегиб. График проходит через оба нуля.

Где легко ошибиться. Уравнение $f'=0$ не обнаруживает граничную точку $x=0$; она требует отдельного рассуждения.

К задаче 5(b): график и ограниченная область



f на $[0;5]$; область между f и g на $[0;1]$ закрашена. В PDF 1 LE=2 см по обеим осям при печати 100%. Точка $J(1|1,5)$ — пересечение, H — максимум f .

c) Das im ersten Quadranten liegende und von f und g eingeschlossene endliche Flächenstück rotiert um die x -Achse. Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

Область первого квадранта, ограниченная f и g , вращается вокруг оси x . Найди объём.

Обе функции равны нулю при $x=0$. Для $x>0$ положим $u=\sqrt{x}>0$. Из $(4-u^2)u/2=3u^4/2$ после деления на u получаем $3u^3+u^2-4=0$.

$3u^3+u^2-4=(u-1)(3u^2+4u+4)$. Дискриминант квадратного множителя равен -32 ; единственный положительный корень $u=1$, то есть $x=1$. На $(0;1)$ выполняется $f>g\geq 0$.

При вращении вертикального отрезка от $g(x)$ до $f(x)$ получается кольцо. Площадь сечения $Q(x)=\pi(f(x)^2-g(x)^2)$, поэтому $V=\pi\int_0^1(f^2-g^2)dx$.

$f^2-g^2=4x-2x^2+x^3/4-9x^4/4$. Первообразная: $2x^2-(2/3)x^3+x^4/16-(9/20)x^5$.

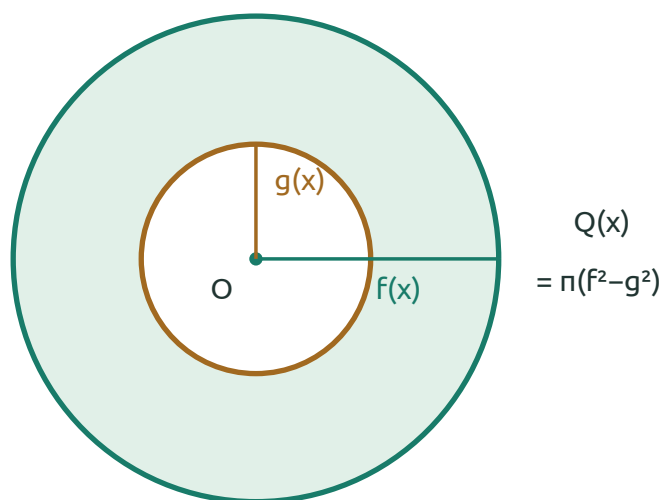
$V=\pi[2x^2-(2/3)x^3+x^4/16-(9/20)x^5]_0^1=\pi(2-2/3+1/16-9/20)=227\pi/240\approx 2,97142$ VE.

В с единица длины отдельно не названа. Если для физического тела принять тот же масштаб, что в рисунке b, 1 LE=2 см, тогда 1 VE=(2 см)³=8 см³ и $V=227\pi/30\approx 23,77138$ см³. Основной координатный ответ остаётся $227\pi/240$ VE.

Проверка. На всём интервале интегрирования внешняя функция не меньше внутренней, так что площадь каждого кольца неотрицательна. Производная найденной первообразной равна подынтегральному многочлену.

Где легко ошибиться. Не используй $\pi(f-g)^2$: при вращении возникает кольцо, а не диск радиуса $f-g$. Перевод объёма требует куба масштаба.

К задаче 5(с): почему возникает кольцо



Поперечное сечение при фиксированном $x \in (0;1)$: внешний радиус $f(x)$, внутренний $g(x)$. Площадь кольца $\pi(f^2 - g^2)$.
Схема метода.

Повторить

Исследование функции: производные и границы

Объёмы вращения и сечения

Задача 6 • Extremwert: что оптимизируем и почему максимум глобален

Von einem Rechteck liegen zwei Seiten auf den Koordinatenachsen. Ein Eckpunkt des Rechtecks liegt auf dem Graphen der Funktion $f(x)=-\ln(x/2)$, mit $0 < x < x_N$ (x_N ist die Nullstelle von f). Die Fläche des Rechtecks soll möglichst groß sein.

Две стороны прямоугольника лежат на координатных осях. Противоположная началу координат вершина находится на $f(x)=-\ln(x/2)$, $0 < x < x_N$, где x_N — нуль f .

Berechnen Sie die Fläche dieses Rechtecks und zeigen Sie, dass es sich tatsächlich um ein Maximum handelt.

Найди наибольшую площадь и докажи, что это действительно максимум.

Нуль f : $-\ln(x/2)=0 \Rightarrow x_N=2$. Для невырожденного прямоугольника нужны $x>0$ и $y>0$, поэтому $0 < x < 2$.

Hauptbedingung: максимизируем площадь $A=x \cdot y$. Nebenbedingung: верхняя правая вершина лежит на графике, поэтому $y=-\ln(x/2)$. После подстановки $A(x)=-x \ln(x/2)$, $0 < x < 2$.

По правилу произведения $A'(x)=-\ln(x/2)-1$, поскольку $(\ln(x/2))'=1/x$. Из $A'=0$ следует $\ln(x/2)=-1$, $x=2/e$.

На $(0; 2/e)$ $A'>0$, на $(2/e; 2)$ $A'<0$. Значит функция растёт до этой точки и убывает после: это единственный глобальный максимум на всей допустимой области. Дополнительно $A''=-1/x < 0$.

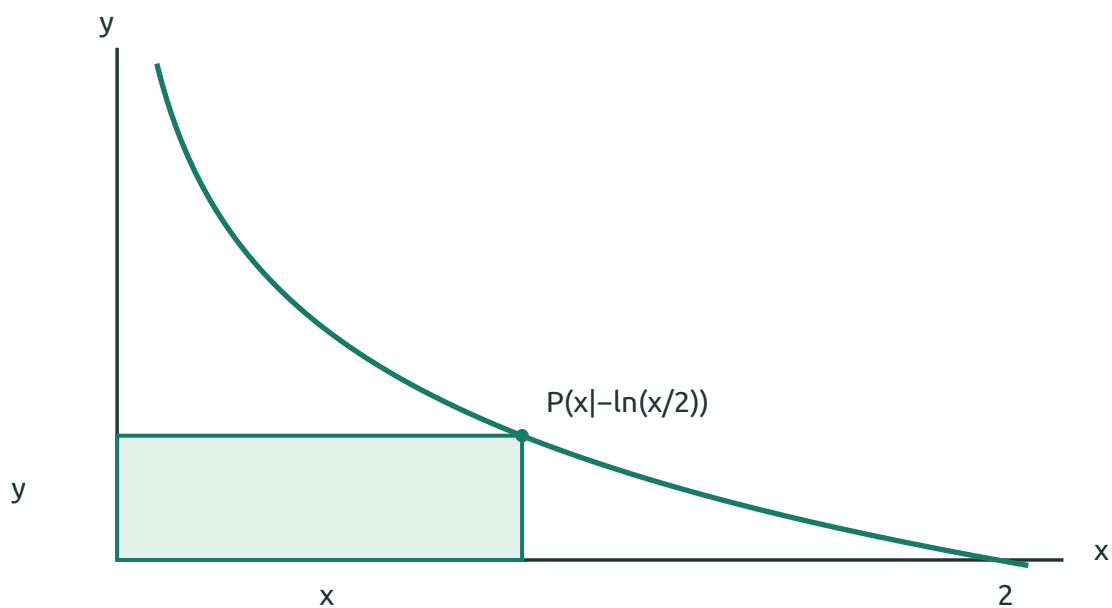
При $x \rightarrow 0+$ и $x \rightarrow 2-$ площадь стремится к 0; предел $x \ln x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0+$ объясняет первую границу. Границы не входят в область невырожденных прямоугольников.

В оптимуме $y=-\ln(1/e)=1$ LE, ширина $x=2/e$ LE. Максимальная площадь $A_{\max}=2/e \approx 0,735759$ FE.

Проверка. Допустимая точка $2/e$ находится между 0 и 2; подстановка в связь даёт высоту 1. Знаки производной доказывают сравнение со всеми допустимыми прямоугольниками.

Где легко ошибиться. Равенство $A'=0$ даёт кандидата. Само по себе оно не доказывает ни максимум, ни глобальность.

К задаче 6: рисунок и связь сторон



Ширина прямоугольника x , высота $y = -\ln(x/2)$. Оптимизируется площадь $A = xy$; показанная вершина допустима. Схема метода.

Повторить

Экстремальные задачи: модель и глобальный максимум

Задача 7 • Umkehraufgabe: все четыре условия

Der Graph einer Polynomfunktion f 3. Grades hat in $W(0|35)$ einen Wendepunkt. Die Wendetangente steht normal zur Geraden $g: 4x-10y=70$. Ferner gilt: $\int_0^1 f(x) dx=40$.

График многочлена третьей степени имеет перегиб $W(0|35)$. Касательная в W перпендикулярна прямой $4x-10y=70$; кроме того, $\int_0^1 f(x) dx=40$.

Полное решение требует определённого интеграла. После производных можно составить только часть условий; здесь приводится весь расчёт.

Stellen Sie die Funktionsgleichung von f auf.

Найди уравнение функции.

Пусть $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $a \neq 0$. Условие $f(0)=35$ даёт $d=35$; из $f''(0)=0$ следует $2b=0$, то есть $b=0$.

Прямая g имеет вид $y=(2/5)x-7$. Наклон перпендикулярной касательной равен $-5/2$, поэтому $f'(0)=c=-5/2$. После трёх условий остаётся $f(x)=ax^3-(5/2)x+35$.

Теперь используем полное интегральное условие:

$$\int_0^1 [ax^3-(5/2)x+35] dx = [(a/4)x^4-(5/4)x^2+35x]_0^1 = a/4-5/4+35=40.$$

Отсюда $a/4=25/4$, $a=25$. Искомая функция $f(x)=25x^3-(5/2)x+35$.

Проверки: $f(0)=35$; $f''(x)=150x$ меняет знак в 0, поэтому W действительно перегиб;
 $f'(0) \cdot (2/5) = (-5/2)(2/5) = -1$.

Определённый интеграл равен $25/4-5/4+35=40$. Коэффициент 25 ненулевой, поэтому степень действительно третья. Касательная для дополнительной проверки: $y=-(5/2)x+35$.

Проверка. Проверены все четыре исходных требования, а не только система для коэффициентов.

Где легко ошибиться. Перегиб не означает горизонтальную касательную. Без интегрального условия коэффициент a остался бы свободным.

Повторить

Восстановление функции по условиям

Определённый интеграл

Задача 8 · Viereck und Turm: условие и явно выбранная модель

Die Punkte A, B, C, D sind die Eckpunkte eines Vierecks. Die Seiten AD und CB sind parallel. Die Seite AB ist 1800m lang. Folgende Winkel sind bekannt: $\angle BAD=42,8^\circ$, $\angle CAD=93^\circ$, $\angle ABD=37,7^\circ$.

В печатном условии A, B, C, D — вершины четырёхугольника, $AD \parallel CB$, «сторона AB» имеет длину 1800 м; $\angle BAD=42,8^\circ$, $\angle CAD=93^\circ$, $\angle ABD=37,7^\circ$.

Фото называет AB стороной. Для числового разбора отдельно выбрана исправленная учебная конфигурация: выпуклый обход A–D–B–C, AB — диагональ. Это изменение условия, а не установленное намерение автора. Старый добавленный обход A–B–C–D с указанными углами несовместим.

a) Berechnen Sie den Winkel $\angle ACB$ und den Flächeninhalt dieses Vierecks. Erstellen Sie eine Skizze!

В оригинале требуется эскиз, угол ACB и площадь. В приведённой ниже учебной ветви реши это для выпуклого обхода A–D–B–C, в котором AB является диагональю.

Ограничение решения: далее используется исправленная учебная конфигурация A–D–B–C с диагональю AB=1800 м. Это не бесспорная реконструкция слова «Seite AB» из оригинала. Авторское намерение по имеющемуся фото не установлено.

В $\triangle ABD$ угол $\angle ADB=180^\circ-42,8^\circ-37,7^\circ=99,5^\circ$. В $\triangle ABC$ угол $\angle CAB=93^\circ-42,8^\circ=50,2^\circ$. Из $AD \parallel CB$ получаем $\angle ABC=42,8^\circ$, поэтому $\angle ACB=180^\circ-50,2^\circ-42,8^\circ=87^\circ$.

По теореме синусов: $AD=1800 \cdot \sin(37,7^\circ)/\sin(99,5^\circ) \approx 1116,054691$ м;
 $BC=1800 \cdot \sin(50,2^\circ)/\sin(87^\circ) \approx 1384,808174$ м. Используем режим DEG.

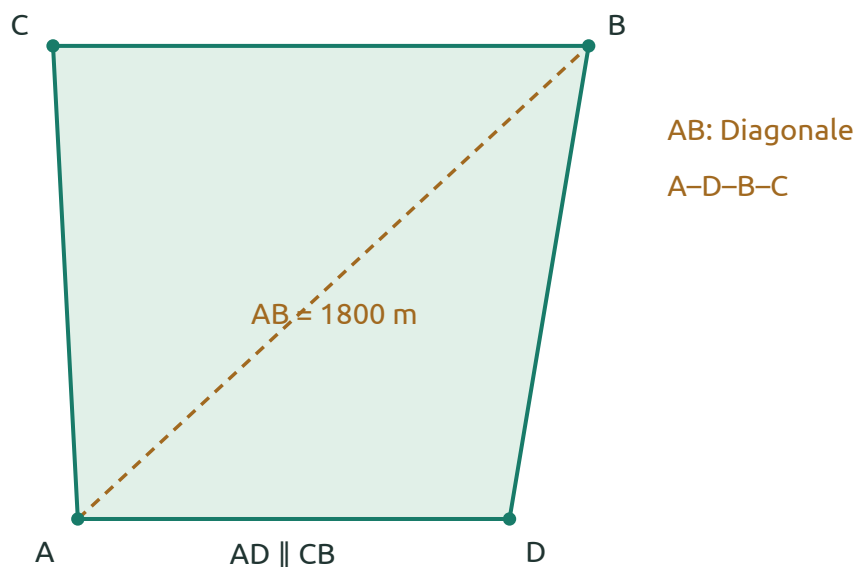
Расстояние между параллельными AD и CB равно $h_T=1800 \cdot \sin(42,8^\circ)$. Площадь $F=(AD+BC)h_T/2 \approx 1\,529\,270,57$ м². Это также сумма площадей $\triangle ABD$ и $\triangle ABC$.

Координатная проверка: $A=(0|0)$, $D=(AD|0)$, $B=(1800 \cos 42,8^\circ | 1800 \sin 42,8^\circ)$. У C та же у-координата, а $x_C=y_B \cdot \cot 93^\circ < 0$. Эти координаты дают тот же выпуклый обход A–D–B–C и ту же площадь по формуле многоугольника.

Проверка. Оба треугольника имеют сумму углов 180° . Параллельные основания расположены по разные стороны диагонали AB; площадь положительна.

Где легко ошибиться. Не называй AB стороной в рисунке A–D–B–C. Добавленный ранее выпуклый обход A–B–C–D здесь невозможен: AC должен лежать внутри угла $\angle BAD=42,8^\circ$, но $\angle CAD=93^\circ$ больше этого угла.

К задаче 8(а): выбранная учебная конфигурация



Только исправленная учебная модель: выпуклый обход A-D-B-C, AB — диагональ. Фото называет AB стороной; эта схема не выдается за бесспорный оригинал.

b) Die Punkte A, B, C, D liegen in einer horizontalen Ebene. Im Punkt D steht ein Turm. Vom Punkt A aus sieht man die Spitze S dieses Turms unter dem Höhenwinkel $\alpha = 7,34^\circ$. Berechnen Sie die Höhe des Turms. Unter welchem Tiefenwinkel sieht man den Punkt B von der Spitze S des Turms?

Точки лежат в горизонтальной плоскости. В D стоит вертикальная башня; из A вершина S видна под углом возвышения $7,34^\circ$. Найди высоту и угол понижения из S к B для той же учебной модели.

В прямоугольном $\triangle ADS$ высота $h = DS = AD \cdot \tan(7,34^\circ) \approx 143,761914 \text{ м}$.

По теореме синусов в $\triangle ABD$: $BD = 1800 \cdot \sin(42,8^\circ) / \sin(99,5^\circ) \approx 1240,000205 \text{ м}$.

Горизонталь через вершину башни параллельна земле. Поэтому угол понижения β к B равен углу возвышения из B: $\tan \beta = h / BD$.

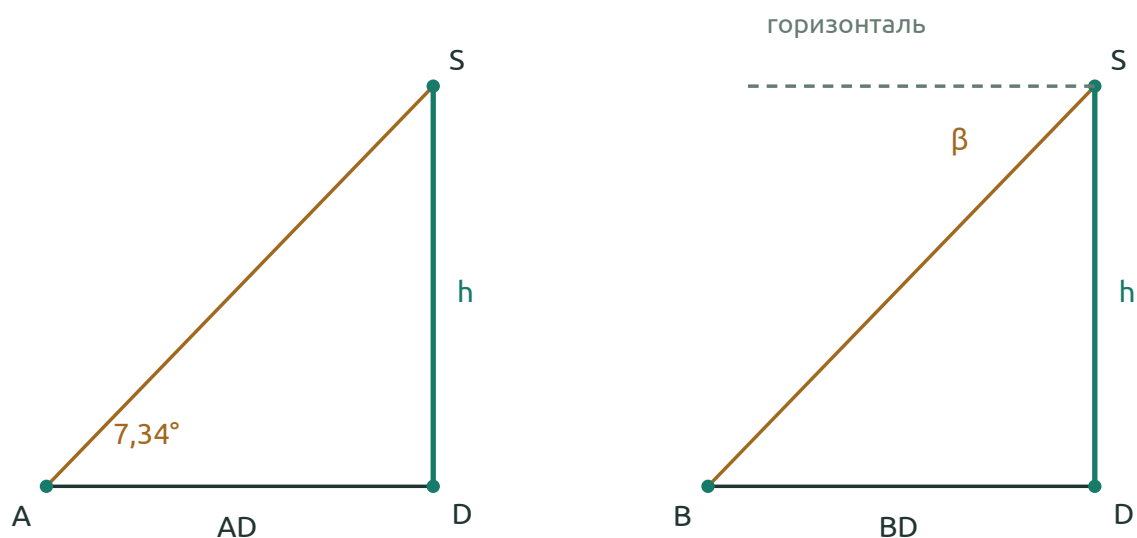
$\beta = \arctan(h / BD) \approx 6,613177^\circ \approx 6,61^\circ$. Башня имеет высоту примерно 143,76 м.

Оба числа относятся к обозначенной учебной конфигурации. Оригинальная геометрическая неоднозначность из а при этом не исчезает.

Проверка. $BD > AD$ при одной высоте башни, поэтому угол из B меньше угла из A: $6,61^\circ < 7,34^\circ$.

Где легко ошибиться. В формуле для угла к B нельзя оставлять AD в знаменателе: точка наблюдения изменилась.

К задаче 8(b): два вертикальных сечения



Два вертикальных сечения одной учебной модели. Слева основание AD , справа BD ; угол понижения β отсчитывается от горизонтали в вершине S . Схема не в масштабе.

Повторить

Тригонометрия в треугольнике

Участок и четырёхугольник