

Объём тела вращения: объяснение

Сложное пространственное тело можно исследовать через простой плоский срез. Для тел вращения таким срезом часто оказывается круг или кольцо; задача сводится к радиусам и определённому интегралу.

Начнём с вращения вокруг оси x , затем сравним диски и кольца, разберём пересечение оси и вращение вокруг y . Перед темой полезно повторить первообразную полинома, подстановку границ и разность квадратов.

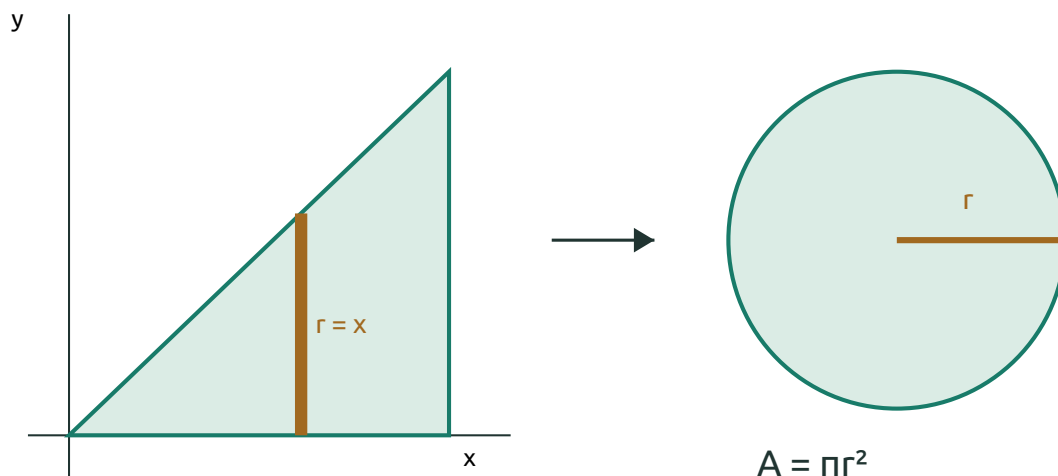
Сначала плоская область и одно сечение

При вращении плоской области получается пространственное тело. Чтобы вычислить его объём, представим тело как последовательность очень тонких слоёв, перпендикулярных оси вращения. Один слой часто имеет круглое сечение.

Для вращения вокруг оси x выбираем вертикальный отрезок исходной области при фиксированном x . Вращаясь, он заполняет круг или кольцо. Нужно найти расстояния от его концов до оси и понять, есть ли внутри отверстие.

Площадь круга радиуса r равна πr^2 . Приблизжённый объём слоя толщины Δx равен $\pi r^2 \Delta x$. Интеграл складывает площади сечений по толщине и даёт точный объём.

Перед вычислением отметьте ось вращения, границы области и выбранный срез. Если эта геометрия записана неправильно, правильная первообразная не исправит модель.



Вертикальный отрезок от оси до $y=x$ после вращения создаёт диск радиуса x . Схема показывает принцип сечения.

Диски при вращении вокруг оси x

Если область идёт от оси x до $y=f(x)$, после вращения получается диск радиуса $|f(x)|$. Значит, независимо от знака f площадь сечения равна $\pi f(x)^2$.

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Квадрат находится внутри интеграла. Сначала считаем площадь круглого среза, затем складываем срезы. Квадрат интеграла площади под графиком имеет другой смысл и другие единицы.

Пример: $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq x$. Радиус $r=x$, поэтому $V = \pi \int_0^2 x^2 dx = 8\pi/3$ VE. Это конус высоты 2 и радиуса основания 2; геометрическая формула $\pi r^2 h/3$ даёт тот же ответ.

Если $y = \sqrt{x}$, квадрат радиуса равен x . При $y = x^2$ квадрат радиуса равен x^4 . Сначала аккуратно возведите всю функцию в квадрат, затем интегрируйте.

Кольца и разность квадратов

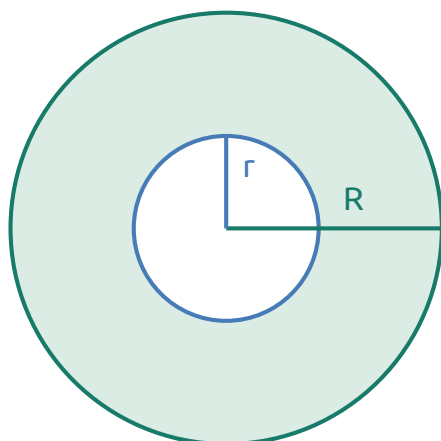
Если область при фиксированном x находится целиком по одну сторону от оси и не достигает её, после вращения остаётся отверстие. Обозначим внешнее расстояние R , внутреннее r , где $R \geq r \geq 0$.

$$V = \pi \int_a^b (R(x)^2 - r(x)^2) dx.$$

Разность квадратов вычитает площадь отверстия из площади внешнего круга. Выражение $(R-r)^2$ — квадрат толщины кольца — не даёт его площадь.

Пример: $x \leq y \leq 2x$, $0 \leq x \leq 1$. $R=2x$, $r=x$. Получаем $V = \pi \int_0^1 (4x^2 - x^2) dx = \pi$ VE. Проверка: разность объёмов конусов $4\pi/3 - \pi/3 = \pi$.

Если обе границы ниже оси, внешней становится та, которая дальше от оси по модулю. Для $-3 \leq y \leq -1$ получаем $R=3$, $r=1$, а не наоборот.



$$A = \pi(R^2 - r^2)$$

$$R \geq r \geq 0$$

Кольцо: из площади внешнего круга πR^2 вычитается площадь отверстия πr^2 .

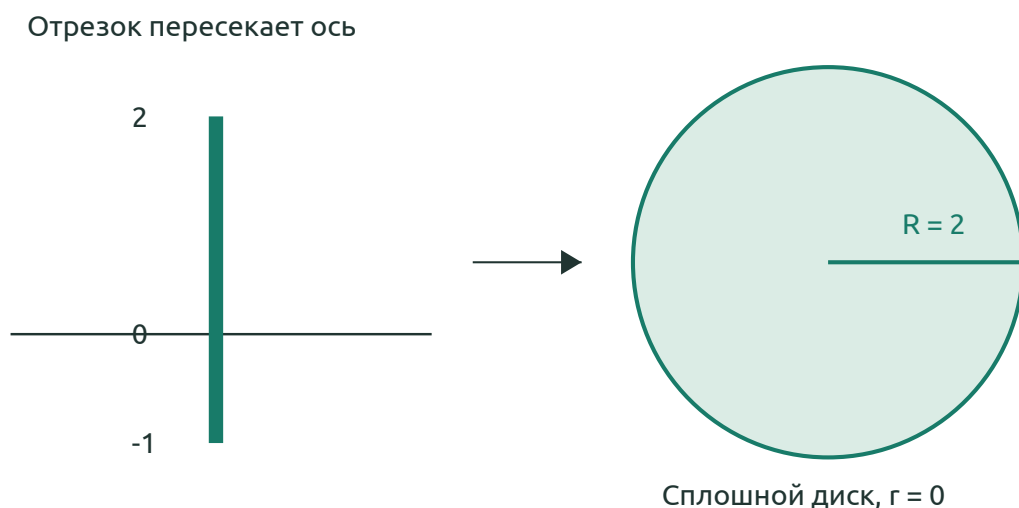
Когда область пересекает ось

Если вертикальный отрезок содержит 0, вращение заполняет все расстояния от оси до самого далёкого конца. Получается сплошной диск: внутренний радиус $r=0$.

Например, отрезок $-1 \leq y \leq 2$ даёт диск радиуса 2. Вычитать круг радиуса 1 нельзя: нижняя часть отрезка вращается внутри уже заполненного диска.

Если оба конца меняются с x , могут меняться и наличие отверстия, и более далёкая граница. Точки разбиения определяются пересечениями с осью и равенством расстояний до неё.

Для области $-1 \leq y \leq x-1$ на $[0;3]$ при $0 < x < 1$ оба конца ниже оси: $R=1$, $r=1-x$. На $[1;2]$ ось пересекается, $R=1$. На $[2;3]$ более далёкий конец $x-1$, поэтому $R=x-1$. Это три разных формулы сечений.



Отрезок $[-1;2]$ пересекает ось. После вращения получается сплошной диск радиуса 2 без отверстия.

Вращение вокруг оси y

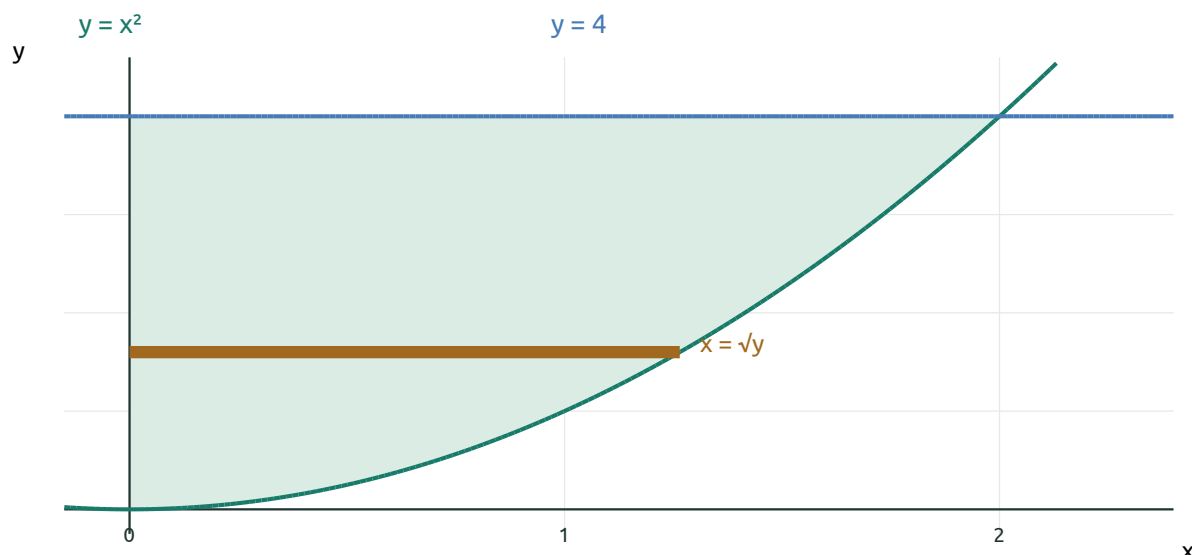
При вращении вокруг y удобно брать горизонтальные срезы и интегрировать по y . Радиусы измеряются в направлении x , а пределы интеграла становятся значениями y .

$V = \pi \int (R(y)^2 - r(y)^2) dy$ с границами по y .

Если граница задана $y=f(x)$, иногда нужно выразить x через y на нужной ветви. Для $y=x^2$ при $x \geq 0$ получаем $x=\sqrt{y}$. Обязательно сохраняйте условие выбора ветви.

Пример: область между $y=x^2$ и $y=4$ при $0 \leq x \leq 2$ вращается вокруг y . На высоте y от 0 до 4 срез идёт от $x=0$ до $x=\sqrt{y}$. Радиус $\sqrt{y}$, поэтому $V = \pi \int_0^4 y dy = 8\pi VE$.

Не всякая область под графиком создаёт диск вокруг y . Для области $0 \leq y \leq x$, $0 \leq x \leq 2$ на высоте y срез идёт от $x=y$ до $x=2$: образуется кольцо $R=2$, $r=y$.



При фиксированном y срез идёт от $x=0$ до $x=\sqrt{y}$. При вращении вокруг y радиус равен $\sqrt{y}$, пределы по y от 0 до 4.

Радиус относительно сдвинутой оси

Радиус — расстояние до указанной оси, а не всегда координата y . При вращении вокруг $y=k$ расстояние от точки $(x;y)$ до оси равно $|y-k|$.

Например, область $0 \leq y \leq x$ на $[0;2]$ вращается вокруг $y=-1$. Внешний радиус $x+1$, внутренний 1. Поэтому площадь среза равна $\pi((x+1)^2 - 1)$, а не πx^2 .

Для вертикальной оси $x=h$ при горизонтальных срезах расстояние равно $|x-h|$. Перед выбором внешнего и внутреннего радиуса отметьте ось на рисунке.

Ось вращения не обязана быть границей исходной области. Если она проходит внутри, возвращаемся к правилу сплошного диска и проверяем, какой конец дальше.

Объём и проверка модели

Если $1 \text{ LE} = k \text{ см}$ по всем пространственным направлениям, $1 \text{ VE} = k^3 \text{ см}^3$. Для $k=2$ один VE равен 8 см^3 . Это отличается от перевода площади, где используется k^2 .

Объём неотрицателен. Сравните его с известным цилиндром или конусом, содержащим всё тело. Сечение не может иметь отрицательную площадь, поэтому $R^2 - r^2 \geq 0$ на всём промежутке.

Пример: область между $y=x^2$ и $y=2x$ на $[0;2]$ вращается вокруг x . $V = \pi \int_0^2 (4x^2 - x^4) dx = 64\pi/15 \text{ VE}$. При $1 \text{ LE} = 2 \text{ см}$ получаем $512\pi/15 \approx 107,23 \text{ см}^3$.

Для некоторых вращений вокруг y полезна независимая проверка цилиндрическими оболочками: при $x \geq 0$ и высоте $h(x)$ объём равен $2\pi \int x \cdot h(x) dx$, если оболочки описывают тело без наложения. Основной метод этой темы — сечения; оболочки здесь служат дополнительной проверкой.

Немецкие слова: Rotationskörper — тело вращения; Rotationsachse — ось вращения; Querschnitt — сечение; Außenradius — внешний радиус; Innenradius — внутренний радиус; Volumen — объём.

Параметры и составные условия

Если известен объём, составьте V как функцию параметра и решите уравнение. Учитывайте ограничения: радиус должен быть неотрицательным, а параметр может задаваться положительным по условию.

Для $y=a\sqrt{x}$ на $[0;3]$ при $a>0$ после вращения вокруг x : $V=\pi a^2 \int_0^3 x \, dx = 9\pi a^2/2$. Из $V=18\pi$ получается $a^2=4$ и потому $a=2$. Отрицательный корень запрещён условием $a>0$.

В составной задаче выпишите отдельные результаты: границы, радиусы, интеграл, объём в VE , перевод единиц и требуемое отношение. Отношение объёмов можно вычислить до перевода масштаба, если масштаб одинаковый.

Полукруг $y=\sqrt{R^2-x^2}$ на $[-R;R]$ при вращении вокруг x образует шар. Квадрат радиуса сечения равен R^2-x^2 , поэтому интегрирование снова сводится к полиному. Это проверяет знакомую формулу объёма шара.