

Объём тела вращения: разборы

Сначала самостоятельная попытка. Здесь условия приведены по-немецки и по-русски; затем дан ход решения, отдельная проверка и распространённая ошибка.

Задача 1

Das Rechteck $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 2$ rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen.

Прямоугольник $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 2$ вращают вокруг x. Найдите объём.

При любом $x \in [0; 5]$ сечение — диск радиуса 2.

$$V = \pi \int_0^5 2^2 dx = 20\pi \text{ VE.}$$

Проверка. Это цилиндр: $\pi r^2 h = \pi \cdot 4 \cdot 5 = 20\pi$.

Где легко ошибиться. Радиус нужно возвести в квадрат до интегрирования.

Повторить в конспекте: Диски при вращении вокруг оси x.

Задача 2

Die Fläche zwischen $y = \sqrt{x}$ und der x-Achse im Intervall $[0; 4]$ rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen.

Область под $y = \sqrt{x}$ на $[0, 4]$ вращают вокруг x. Найдите V.

$$R(x) = \sqrt{x}, \text{ поэтому } R(x)^2 = x.$$

$$V = \pi \int_0^4 x dx = \pi [x^2/2]_0^4 = 8\pi \text{ VE.}$$

Проверка. Площади срезов линейно растут от 0 до 4π ; средняя 2π на длине 4 даёт 8π .

Где легко ошибиться. Интеграл самой $\sqrt{x}$ вычисляет площадь плоской области, а не объём.

Повторить в конспекте: Диски при вращении вокруг оси x.

Задача 3

Die Dreiecksfläche $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq x$ rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen und überprüfen Sie es geometrisch.

Треугольная область $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq x$ вращается вокруг оси x. Найдите объём и проверьте геометрически.

$$V = \pi \int_0^2 x^2 dx = \pi [x^3/3]_0^2 = 8\pi/3 \text{ VE.}$$

$$\text{По геометрии } V = \pi \cdot 2^2 \cdot 2/3 = 8\pi/3 \text{ VE.}$$

Проверка. Интегральный и геометрический способы дают один результат.

Где легко ошибиться. Высота конуса измеряется вдоль оси x, а радиус поперёк неё.

Повторить в конспекте: Диски при вращении вокруг оси x.

Задача 4

Die Fläche zwischen $y=2-x$, der x -Achse und $x=0$ im Intervall $[0;2]$ rotiert um die x -Achse. Berechnen Sie das Volumen.

Область под $y=2-x$ над осью x на $[0;2]$ вращается вокруг x . Найдите объём.

$$V=\pi\int_0^2(2-x)^2dx=\pi\int_0^2(4-4x+x^2)dx.$$

$$V=\pi[4x-2x^2+x^3/3]_0^2=8\pi/3 \text{ VE.}$$

Проверка. Получается конус тех же размеров, что в задаче 3, но с противоположной ориентацией.

Где легко ошибиться. $(2-x)^2=4-4x+x^2$; среднее слагаемое не исчезает.

Повторить в конспекте: Диски при вращении вокруг оси x .

Задача 5

Die Fläche zwischen $y=-x$ und der x -Achse im Intervall $[0;2]$ rotiert um die x -Achse. Berechnen Sie das Volumen.

Область между $y=-x$ и осью x на $[0;2]$ вращается вокруг x . Найдите объём.

На $[0;2]$ расстояние графика до оси равно x .

$$V=\pi\int_0^2(-x)^2dx=8\pi/3 \text{ VE.}$$

Проверка. Отражение исходной области относительно оси вращения не меняет тело.

Где легко ошибиться. Отрицательная координата границы не создаёт отрицательный объём.

Повторить в конспекте: Диски при вращении вокруг оси x .

Задача 6

Die Fläche zwischen $y=x^2$ und der x -Achse im Intervall $[0;1]$ rotiert um die x -Achse. Berechnen Sie das Volumen.

Область под $y=x^2$ на $[0;1]$ вращается вокруг оси x . Найдите объём.

$$R=x^2, R^2=x^4.$$

$$V=\pi\int_0^1x^4dx=\pi/5 \text{ VE.}$$

Проверка. Тело лежит внутри цилиндра радиуса 1 и высоты 1; $\pi/5 < \pi$.

Где легко ошибиться. Не заменяйте $(x^2)^2$ на x^2 .

Повторить в конспекте: Диски при вращении вокруг оси x .

Задача 7

Die Fläche $0 \leq x \leq 1$, $x \leq y \leq 2x$ rotiert um die x -Achse. Berechnen Sie das Volumen.

Область $0 \leq x \leq 1$, $x \leq y \leq 2x$ вращают вокруг x . Найдите V .

$$V=\pi\int_0^1((2x)^2-x^2)dx=3\pi\int_0^1x^2dx.$$

$$V=\pi \text{ VE.}$$

Проверка. Разность объёмов двух конусов равна $4\pi/3 - \pi/3 = \pi$.

Где легко ошибиться. $(2x-x)^2$ описывает другое сечение и даёт неверный объём.

Повторить в конспекте: Кольца и разность квадратов.

Задача 8

Die Fläche $0 \leq x \leq 3$, $-1 \leq y \leq 2$ rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen.

Область $0 \leq x \leq 3$, $-1 \leq y \leq 2$ вращают вокруг x. Найдите V.

Каждый вертикальный отрезок $[-1; 2]$ заполняет при вращении диск радиуса 2.

Внутренний радиус 0, поэтому $V = \pi \int_0^3 4 dx = 12\pi$ VE.

Проверка. Получается сплошной цилиндр радиуса 2 и высоты 3.

Где легко ошибиться. Круг радиуса 1 нельзя вычитать: он уже заполнен вращением области.

Повторить в конспекте: Когда область пересекает ось.

Задача 9

Die Fläche $0 \leq y \leq 3$, $0 \leq x \leq y/2$ rotiert um die y-Achse. Berechnen Sie das Volumen.

Область $0 \leq y \leq 3$, $0 \leq x \leq y/2$ вращают вокруг y. Найдите V.

$R(y) = y/2$.

$V = \pi \int_0^3 (y/2)^2 dy = (\pi/4) [y^3/3]_0^3 = 9\pi/4$ VE.

Проверка. Конус имеет высоту 3 и радиус $3/2$: $\pi \cdot (3/2)^2 \cdot 3/3 = 9\pi/4$.

Где легко ошибиться. При интегрировании по y нельзя подставлять пределы для x.

Повторить в конспекте: Вращение вокруг оси y.

Задача 10

Die Fläche zwischen $y = x^2$ und $y = 2x$ im Intervall $[0; 2]$ rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen in cm^3 , wenn auf allen Achsen 1 LE = 2 cm gilt.

Область между $y = x^2$ и $y = 2x$ на $[0, 2]$ вращают вокруг x. Найдите объём в cm^3 при 1 LE = 2 см.

$0 \leq x^2 \leq 2x$, поэтому $V = \pi \int_0^2 (4x^2 - x^4) dx$.

$V = \pi [4x^3/3 - x^5/5]_0^2 = \pi (32/3 - 32/5) = 64\pi/15$ VE.

1 VE = 8 cm^3 , поэтому $V = 512\pi/15 \approx 107,23$ cm^3 .

Проверка. Разность квадратов неотрицательна, а масштаб $2^3 = 8$ применяется один раз к готовому объёму.

Где легко ошибиться. Для объёма нельзя использовать множитель площади 2^2 .

Повторить в конспекте: Объём и проверка модели.

Задача 11

Das Rechteck $0 \leq x \leq 2$, $-3 \leq y \leq -1$ rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen.

Прямоугольник $0 \leq x \leq 2$, $-3 \leq y \leq -1$ вращается вокруг x. Найдите объём.

Площадь сечения $\pi(3^2 - 1^2) = 8\pi$.

$$V = \pi \int_0^2 (9 - 1) dx = 16\pi \text{ VE.}$$

Проверка. Разность цилиндров: $18\pi - 2\pi = 16\pi$.

Где легко ошибиться. Ни -3 , ни -1 не являются отрицательными радиусами: радиусы — их расстояния до оси.

Повторить в конспекте: Кольца и разность квадратов.

Задача 12

Das Rechteck $1 \leq y \leq 3$, $1 \leq x \leq 2$ rotiert um die y-Achse. Berechnen Sie das Volumen.

Прямоугольник $1 \leq y \leq 3$, $1 \leq x \leq 2$ вращается вокруг y. Найдите объём.

$$V = \pi \int_1^3 (2^2 - 1^2) dy = 3\pi(3 - 1) = 6\pi \text{ VE.}$$

Проверка. Полый цилиндр имеет высоту 2 и площадь кольца 3π .

Где легко ошибиться. Высота тела $3 - 1$, а не верхняя координата 3.

Повторить в конспекте: Вращение вокруг оси y.

Задача 13

Die Dreiecksfläche $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq x$ rotiert diesmal um die y-Achse. Berechnen Sie das Volumen mithilfe horizontaler Querschnitte.

Треугольная область $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq x$ теперь вращается вокруг y. Найдите объём с помощью горизонтальных сечений.

Границы по y: $0 \leq y \leq 2$; $R=2$, $r=y$.

$$V = \pi \int_0^2 (4 - y^2) dy = \pi [4y - y^3/3]_0^2 = 16\pi/3 \text{ VE.}$$

Проверка. Из цилиндра объёма 8π вычитается конус объёма $8\pi/3$; остаётся $16\pi/3$.

Где легко ошибиться. Область под $y=x$ при горизонтальном срезе находится справа от $x=y$, а не слева.

Повторить в конспекте: Вращение вокруг оси y.

Задача 14

Die Fläche zwischen $y=x^2$ und $y=4$ für $0 \leq x \leq 2$ rotiert um die y-Achse. Berechnen Sie das Volumen.

Область между $y=x^2$ и $y=4$ при $0 \leq x \leq 2$ вращается вокруг y. Найдите объём.

Из $x^2 \leq y \leq 4$ и $x \geq 0$ получаем горизонтальные срезы $0 \leq x \leq \sqrt{y}$, $0 \leq y \leq 4$.

$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{y})^2 dy = \pi [y^2/2]_0^4 = 8\pi \text{ VE.}$$

Проверка. Оболочки дают $2\pi \int_0^2 x(4 - x^2) dx = 8\pi$.

Где легко ошибиться. После смены переменной пределы по y равны 0 и 4, а не 0 и 2.

Повторить в конспекте: Вращение вокруг оси y.

Задача 15

Die Fläche $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq x$ rotiert um die Gerade $y = -1$. Berechnen Sie das Volumen.

Область $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq x$ вращается вокруг прямой $y = -1$. Найдите объём.

$$V = \pi \int_0^2 ((x+1)^2 - 1^2) dx = \pi \int_0^2 (x^2 + 2x) dx.$$

$$V = \pi [x^3/3 + x^2]_0^2 = 20\pi/3 \text{ VE.}$$

Проверка. Отличие от вращения вокруг x равно $2\pi \int_0^2 x dx = 4\pi$; $8\pi/3 + 4\pi = 20\pi/3$.

Где легко ошибиться. Радиус измеряют до $y = -1$, а не автоматически до оси x .

Повторить в конспекте: Радиус относительно сдвинутой оси.

Задача 16

Für $a > 0$ rotiert die Fläche zwischen $y = a\sqrt{x}$ und der x -Achse im Intervall $[0; 3]$ um die x -Achse. Das Volumen beträgt 18π VE. Bestimmen Sie a .

При $a > 0$ область под $y = a\sqrt{x}$ на $[0; 3]$ вращается вокруг x . Объём равен 18π VE. Найдите a .

$$V(a) = \pi a^2 \int_0^3 x dx = 9\pi a^2/2.$$

$$\text{Из } 9\pi a^2/2 = 18\pi \text{ получаем } a^2 = 4.$$

Так как $a > 0$, ответ $a = 2$.

Проверка. Подстановка $a = 2$ даёт $9\pi \cdot 4/2 = 18\pi$.

Где легко ошибиться. Без ограничения знака было бы два значения параметра; условие оставляет только положительное.

Повторить в конспекте: Параметры и составные условия.

Задача 17

Die Fläche $0 \leq x \leq 3$, $-1 \leq y \leq x-1$ rotiert um die x -Achse. Bestimmen Sie die Stellen, an denen sich die Querschnittsformel ändert, und berechnen Sie das Volumen.

Область $0 \leq x \leq 3$, $-1 \leq y \leq x-1$ вращается вокруг x . Найдите точки изменения формулы сечения и вычислите объём.

На $[0; 1]$ срез — кольцо: $R = 1$, $r = 1 - x$, площадь $\pi(1 - (1-x)^2)$.

На $[1; 2]$ срез — диск $R = 1$; на $[2; 3]$ — диск $R = x - 1$.

$$V = \pi (\int_0^1 (2x - x^2) dx + \int_1^2 1 dx + \int_2^3 (x-1)^2 dx).$$

Три вклада равны $2/3$, 1 и $7/3$. Поэтому $V = 4\pi$ VE.

Проверка. Формулы площадей согласуются в точках разбиения: при $x = 1$ и $x = 2$ получаем π . Все вклады неотрицательны.

Где легко ошибиться. Формула разности квадратов на всём $[0; 3]$ ошибочно вычитает отверстие там, где область пересекает ось.

Повторить в конспекте: Когда область пересекает ось.

Задача 18

Die obere Halbkreisfläche $0 \leq y \leq \sqrt{9-x^2}$, $-3 \leq x \leq 3$ rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen, das Verhältnis zum umschließenden Zylinder mit Radius 3 und Höhe 6 sowie das Volumen in cm^3 bei 1 LE=0,5 cm auf allen Achsen.

Верхний полукруг $0 \leq y \leq \sqrt{9-x^2}$, $-3 \leq x \leq 3$ вращается вокруг x. Найдите объём, его отношение к объёму цилиндра радиуса 3 и высоты 6, а также объём в cm^3 при масштабе 1 LE=0,5 см по всем осям.

$$V = \pi \int_{-3}^3 (9-x^2) dx = \pi [9x - x^3/3]_{-3}^3 = 36\pi \text{ VE.}$$

$$V_{\text{цилиндра}} = 54\pi \text{ VE, поэтому } V/V_{\text{цилиндра}} = 36/54 = 2/3.$$

$$\text{При } 1 \text{ VE} = (0,5)^3 \text{ cm}^3 = 1/8 \text{ cm}^3 \text{ получаем } V = 36\pi/8 = 9\pi/2 \approx 14,14 \text{ cm}^3.$$

Проверка. Тело — шар радиуса 3: $4\pi \cdot 3^3/3 = 36\pi \text{ VE}$. В сантиметрах радиус 1,5, и формула шара также даёт $9\pi/2$.

Где легко ошибиться. Масштаб 0,5 уменьшает объём в 8 раз; отношение объёмов при общем масштабе не меняется.

Повторить в конспекте: Объём и проверка модели.