

Интегралы и площади: объяснение

Интеграл помогает восстановить величину по скорости её изменения и посчитать накопленный результат. Но один и тот же вычисленный интеграл может означать площадь со знаком, количество жидкости или перемещение. Сначала разберём смысл, затем вычисления.

Путь темы: первообразная и её проверка → подстановка границ → площадь с учётом знака → область между графиками → единицы и составные условия. Для начала нужны степени, производные полиномов и решение простых уравнений.

Первообразная возвращает нас от скорости к величине

Производная отвечает на вопрос, как меняется функция. Интегрирование часто решает обратную задачу: по известной производной восстановить саму функцию. Если $F'(x)=f(x)$ на промежутке, F называют первообразной функции f .

Для $f(x)=2x$ подходят $F(x)=x^2$, $F(x)=x^2+3$ и $F(x)=x^2-10$: производная постоянного числа равна нулю. Поэтому все первообразные записывают $F(x)=x^2+C$, где C — произвольная постоянная. Одно дополнительное значение $F(x_0)$ определит C .

$F'=f$. Если F — одна первообразная, то $F+C$ — все первообразные на данном промежутке.

Пример: $F'(x)=2x-4$, $F(1)=3$. Сначала $F(x)=x^2-4x+C$. Подстановка $x=1$ даёт $1-4+C=3$, то есть $C=6$. Проверяем отдельно производную и условие $F(1)=3$.

Как находить и проверять первообразную

Сумму интегрируют по слагаемым; постоянный множитель можно оставить перед первообразной. Для степенной функции нужно увеличить показатель на 1 и разделить на новый показатель.

$\int x^n dx = x^{n+1}/(n+1) + C$ при $n \neq -1$; $\int 1/x dx = \ln|x| + C$ на промежутке, не содержащем 0.

Для практики достаточно узнавать $x^2 \rightarrow x^3/3$, $x \rightarrow x^2/2$, $1 \rightarrow x$, $1/\sqrt{x} \rightarrow 2\sqrt{x}$ при $x>0$. Например, первообразная $4x^3-6x+2$ равна x^4-3x^2+2x+C .

Экспонента тоже имеет первообразную: при $k \neq 0$ для $e^{(kx)}$ подходит $e^{(kx)}/k$.

Дифференцирование возвращает множитель k и тем самым проверяет деление. Запись $e^{(kx)}$ означает e в степени kx .

Не выбирайте первообразную по внешнему сходству. Возьмите производную полученного выражения и сравните каждое слагаемое с исходной функцией.

Формулы применяют на промежутке, где функция определена. Для дробных степеней и корней в этой теме используем положительные x , если иная область явно не задана.

Определённый интеграл и порядок границ

Пусть f непрерывна на $[a;b]$, а $F'=f$. Определённый интеграл получается как изменение первообразной между двумя границами.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Сначала подставляем верхнюю границу, затем вычитаем значение в нижней целиком в скобках. Для $\int$ от -1 до 2 функции $2x+1$ берём $F=x^2+x$: $F(2)=6$, $F(-1)=0$, ответ 6 .

Произвольная C сокращается: $[F(b)+C]-[F(a)+C]=F(b)-F(a)$. Поэтому в числовом ответе определённого интеграла нет $+C$. При перестановке границ знак меняется; при одинаковых границах интеграл равен нулю.

Подынтегральная переменная не обязана быть x . Если $Q(t)$ измеряется в литрах в минуту, интеграл $Q(t)$ по времени в минутах измеряется в литрах.

Интеграл со знаком и геометрическая площадь

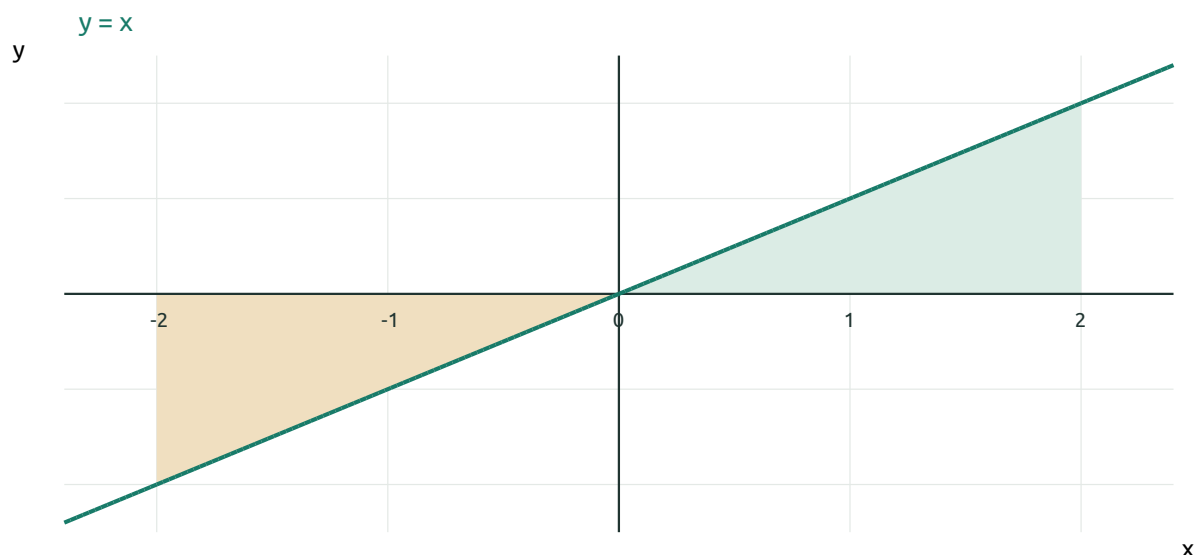
На участке над осью x функция положительна: вклад в интеграл положителен. Под осью вклад отрицателен. Геометрическая площадь складывает обе части с положительным знаком.

$A = \int_a^b |f(x)| dx$. Для вычисления найдите нули и разделите промежуток там, где меняется знак.

Пример: $y=x$ на $[-1;2]$. Интеграл равен $3/2$, а площадь равна $1/2+2=5/2$ FE. Два треугольника дают независимую геометрическую проверку.

Для $y=x$ на $[-2;2]$ определённый интеграл равен нулю, потому что отрицательный и положительный вклады сокращаются. Площадь равна 4 FE. Модуль одного общего интеграла здесь не помогает: $|0|$ всё ещё 0 .

Нуль функции не всегда означает смену знака: x^2 касается оси в 0 , но остаётся неотрицательной. Знаки устанавливают по множителям или пробным точкам.



На $[-2;0]$ вклад интеграла отрицателен, на $[0;2]$ положителен. Площади двух треугольников складываются.

Площадь между графиками

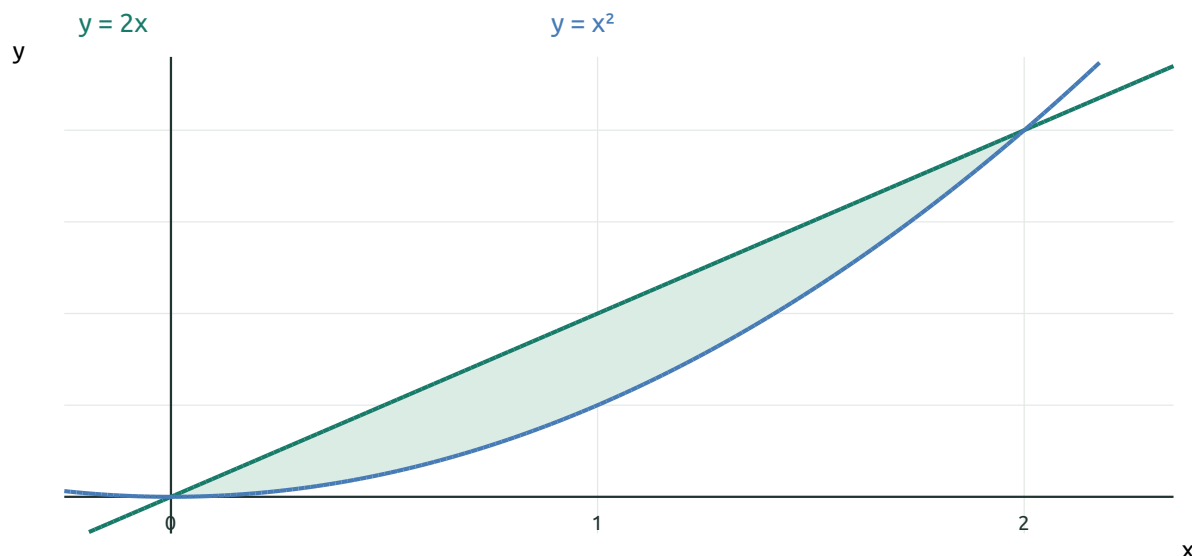
Сначала выясните, чем замкнута область: пересечениями графиков и, если они указаны, дополнительными вертикальными границами. Для пересечений решаем $f(x)=g(x)$.

Высота тонкой вертикальной полосы равна верхней функции минус нижняя. Если порядок меняется, делим интеграл по точкам пересечения.

$A = \int_a^b (\text{верхняя функция} - \text{нижняя функция}) dx$.

Пример: $f=2x$ и $g=x^2$. Пересечения $x=0$ и $x=2$. На $(0;2)$ разность $x(2-x)>0$, поэтому $A = \int_0^2 (2x - x^2) dx = [x^2 - x^3/3]_0^2 = 4/3$ FE.

Оба графика могут лежать ниже оси. Если верхний $y=-1$, а нижний $y=x^2-3$ на $[-1;1]$, высота равна $-1 - (x^2-3) = 2 - x^2$. Порядок определяется высотой графиков, а не знаком их координат.



Пересечения задают $x=0$ и $x=2$. Высота каждой полосы равна $2x - x^2$; площадь области $4/3$ FE.

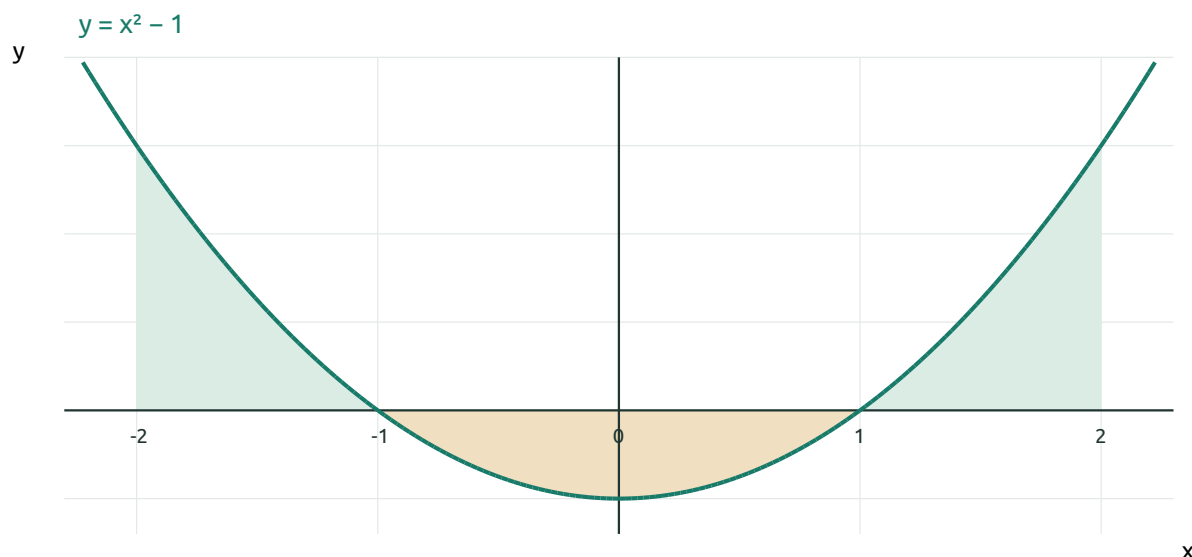
Как собрать несколько участков

Для $f=x^2-1$ на $[-2;2]$ сначала найдём нули -1 и 1 . На краях функция положительна, посередине отрицательна. Это три участка с разными выражениями для высоты.

Чётность может сократить вычисления: площади слева и справа одинаковы. Тогда $A = 2(\int_0^1 (1-x^2) dx + \int_1^2 (x^2-1) dx) = 4$ FE. Симметрия — обоснованный способ сократить запись, но знак каждого участка всё равно нужно проверить.

Для двух функций анализируем знак именно разности $f-g$. Например, x^3 и x пересекаются при $-1, 0, 1$; порядок на двух половинах меняется. Один общий интеграл их разности даст нуль, хотя область имеет положительную площадь.

Та же идея работает для движения: интеграл скорости даёт перемещение, интеграл модуля скорости — путь. В точке разворота скорость меняет знак.



Нули -1 и 1 делят область на три части. Среднюю часть учитываем в площади со знаком плюс.

Если неизвестна граница или параметр

Если площадь задана, составьте для неё выражение и приравняйте нужному числу. Сначала установите знаки и допустимую область параметра; иначе уравнение может описывать интеграл со знаком вместо площади.

Пример: под $y = ax^2$ на $[0; 2]$ при $a > 0$ площадь $A = a \cdot 8/3$. Из $A = 12$ получаем $a = 9/2$. Подстановка в исходный интеграл проверяет ответ.

Если неизвестна граница c , первообразная превращает интеграл в обычное уравнение для c . Каждое найденное значение нужно проверить по исходному промежутку. Корень вне него может быть алгебраически верным, но геометрически неподходящим.

Для линии $y = 6 - 2x$ на $[0; 3]$ полная площадь равна 9 FE. Слева от c площадь $6c - c^2$; справа — $9 - (6c - c^2)$. Так условие отношения площадей становится уравнением.

Единицы и проверка результата

Если $1 \text{ LE} = k$ сантиметров по обеим осям, то $1 \text{ FE} = k^2 \text{ см}^2$. Для площади $4/3 \text{ FE}$ при $k = 3$ ответ равен 12 см^2 . Если масштабы осей разные, используют произведение горизонтального и вертикального коэффициентов.

Площадь неотрицательна. Сравните её с площадью охватывающего прямоугольника. Например, область между $2x$ и x^2 имеет ширину 2 и максимальную высоту 1, поэтому её площадь меньше 2 FE.

Проверяйте три независимых шага: правильность первообразной производной; границы и знаки по условию; размер и единицы результата. Десятичное округление выполняют в конце.

Немецкие слова: Stammfunktion — первообразная; bestimmtes Integral — определённый интеграл; Flächeninhalt — площадь; Schnittpunkt — точка пересечения; eingeschlossene Fläche — ограниченная область; Weg — путь; Ortsänderung — перемещение.