

Интегралы и площади: разборы

Сначала самостоятельная попытка. Здесь условия приведены по-немецки и по-русски; затем дан ход решения, отдельная проверка и распространённая ошибка.

Задача 1

Bestimmen Sie alle Stammfunktionen von $f(x)=4x^3-6x+2$ auf $\mathbb{R}$. Überprüfen Sie das Ergebnis durch Ableiten.

Найдите все первообразные $f(x)=4x^3-6x+2$ на $\mathbb{R}$ и проверьте ответ производной.

Первообразные отдельных слагаемых: x^4 , $-3x^2$ и $2x$.

Поэтому $F(x)=x^4-3x^2+2x+C$, $C \in \mathbb{R}$.

Проверка. $F'(x)=4x^3-6x+2$; производная C равна нулю.

Где легко ошибиться. Не забывают +C, когда спрашивают все первообразные.

Повторить в конспекте: Как находить и проверять первообразную.

Задача 2

Für F gilt $F'(x)=2x-4$ und $F(1)=3$. Bestimmen Sie $F(x)$.

Известно $F'(x)=2x-4$ и $F(1)=3$. Найдите $F(x)$.

$F(x)=x^2-4x+C$.

Из $F(1)=1-4+C=3$ получаем $C=6$.

Искомая функция $F(x)=x^2-4x+6$.

Проверка. $F'=2x-4$ и $F(1)=1-4+6=3$.

Где легко ошибиться. Постоянная задаётся значением F , а не значением F' .

Повторить в конспекте: Первообразная возвращает нас от скорости к величине.

Задача 3

Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen $y=3x^2$ und der x -Achse im Intervall $[0;2]$.

Найдите площадь под $y=3x^2$ на $[0,2]$.

Функция неотрицательна на $[0;2]$, поэтому площадь равна определённому интегралу.

$A=\int_0^2 3x^2 dx = [x^3]_0^2 = 8$ FE.

Проверка. Производная x^3 равна $3x^2$; ответ положителен.

Где легко ошибиться. После интегрирования коэффициент 3 не остаётся перед x^3 .

Повторить в конспекте: Определённый интеграл и порядок границ.

Задача 4

Berechnen Sie das bestimmte Integral von $f(x)=2x+1$ im Intervall $[-1;2]$.

Вычислите определённый интеграл $f(x)=2x+1$ на $[-1;2]$.

$F(x)=x^2+x$. Значения на границах: $F(2)=6$, $F(-1)=0$.

$\int$ от -1 до 2 $(2x+1) dx = 6-0=6$.

Проверка. Трапеция со знаковыми высотами -1 и 5 и шириной 3 даёт $(-1+5) \cdot 3/2=6$.

Где легко ошибиться. Здесь спрашивают интеграл, поэтому не заменяйте отрицательный вклад его модулем.

Повторить в конспекте: Определённый интеграл и порядок границ.

Задача 5

Berechnen Sie $\int_1^4 1/\sqrt{x} dx$. Geben Sie eine Stammfunktion auf $(0;\infty)$ an.

Вычислите $\int_1^4 1/\sqrt{x} dx$ и укажите первообразную на $(0;\infty)$.

На $x>0$ подходит $F(x)=2\sqrt{x}$.

$\int_1^4 1/\sqrt{x} dx = [2\sqrt{x}]_1^4 = 4-2=2$.

Проверка. Производная $2\sqrt{x}$ равна $1/\sqrt{x}$; границы 1 и 4 лежат в области $x>0$.

Где легко ошибиться. Не применяйте формулу степенной первообразной с прежним показателем.

Повторить в конспекте: Как находить и проверять первообразную.

Задача 6

Berechnen Sie $\int_{-2}^2 x dx$ und den Flächeninhalt zwischen $y=x$ und der x -Achse im Intervall $[-2;2]$.

Найдите интеграл $\int_{-2}^2 x dx$ и площадь между $y=x$ и осью x на этом отрезке.

Интеграл равен $[x^2/2]$ от -2 до $2 = 2-2=0$.

На $[-2;0]$ $y \leq 0$, на $[0;2]$ $y \geq 0$. Поэтому $A = -\int_{-2}^0 x dx + \int_0^2 x dx = 2+2=4$ FE.

Проверка. Два прямоугольных треугольника с катетами 2 имеют площадь по 2 FE.

Где легко ошибиться. Модуль общего интеграла $|0|$ не является площадью.

Повторить в конспекте: Интеграл со знаком и геометрическая площадь.

Задача 7

Berechnen Sie den Flächeninhalt der von $y=4$ und $y=x^2$ eingeschlossenen Fläche.

Найдите площадь между $y=4$ и $y=x^2$, ограниченную их пересечениями.

Пересечения: $x=-2$ и $x=2$. На $[-2;2]$ верхняя функция 4 , нижняя x^2 .

$A = \int_{-2}^2 (4-x^2) dx = [4x-x^3/3]_{-2}^2 = 32/3$ FE.

Проверка. По симметрии $A = 2 \int_0^2 (4-x^2) dx = 32/3$; $A < 4 \cdot 4 = 16$ FE.

Где легко ошибиться. Границы дают две точки пересечения, а не только $x=2$.

Повторить в конспекте: Площадь между графиками.

Задача 8

Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen $y=x^2-1$ und der x-Achse im Intervall $[-2;2]$.

Найдите площадь между $y=x^2-1$ и осью x на $[-2,2]$.

Функция меняет знак при -1 и 1 ; на $(-1;1)$ она отрицательна.

$$A=2(\int_0^1(1-x^2)dx+\int_1^2(x^2-1)dx).$$

Первый интеграл равен $2/3$, второй $4/3$; $A=2(2/3+4/3)=4$ FE.

Проверка. Знаки проверяются точками $x=0$ и $x=2$; обе половины симметричны.

Где легко ошибиться. $|ff|$ и $\int|f|$ здесь различаются.

Повторить в конспекте: Как собрать несколько участков.

Задача 9

Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen $f(x)=x^3$ und $g(x)=x$ im Intervall $[-1;1]$.

Найдите площадь между $f=x^3$ и $g=x$ на $[-1,1]$.

Пересечения: $x(x-1)(x+1)=0$, то есть $-1, 0, 1$.

$$A=2\int_0^1(x-x^3)dx=2[x^2/2-x^4/4]_0^1.$$

$$A=2(1/2-1/4)=1/2 \text{ FE.}$$

Проверка. Каждая из двух равных частей имеет площадь $1/4$ FE.

Где легко ошибиться. Нечётность разности даёт нулевой интеграл со знаком, а не нулевую площадь.

Повторить в конспекте: Как собрать несколько участков.

Задача 10

Die Fläche zwischen $y=2x$ und $y=x^2$ ist durch die Schnittpunkte begrenzt. Auf beiden Achsen gilt $1 \text{ LE}=3 \text{ cm}$. Berechnen Sie ihren Flächeninhalt in cm^2 .

Область между $y=2x$ и $y=x^2$ ограничена точками их пересечения. Масштаб по обеим осям: $1 \text{ LE}=3 \text{ cm}$. Найдите площадь области в cm^2 .

$$A=\int_0^2(2x-x^2)dx=4/3 \text{ FE.}$$

Один FE соответствует $(3 \text{ cm})^2=9 \text{ cm}^2$.

$$A=(4/3)\cdot 9=12 \text{ cm}^2.$$

Проверка. При увеличении всех длин в 3 раза площадь увеличивается в 9 раз.

Где легко ошибиться. Множитель 3 переводит длину; для площади нужен множитель 9.

Повторить в конспекте: Единицы и проверка результата.

Задача 11

Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen $y=-1$ und $y=x^2-3$ im Intervall $[-1;1]$.

Найдите площадь между $y=-1$ и $y=x^2-3$ на $[-1;1]$.

На $[-1;1]$ $x^2-3 \leq -2 < -1$, поэтому верхняя функция равна -1 .

$$A = \int_{-1}^1 (2 - x^2) dx = [2x - x^3/3]_{-1}^1 = 10/3 \text{ FE.}$$

Проверка. Высота лежит между 1 и 2, ширина 2; поэтому $2 \leq A \leq 4$, и $10/3$ подходит.

Где легко ошибиться. Не меняйте порядок функций только потому, что их значения отрицательны.

Повторить в конспекте: Площадь между графиками.

Задача 12

Berechnen Sie den Flächeninhalt der von $y=x^2$ und $y=2x+3$ eingeschlossenen Fläche.

Найдите площадь области, ограниченной $y=x^2$ и $y=2x+3$.

Пересечения: $(x-3)(x+1)=0$, $x=-1$ и $x=3$.

На этом промежутке верхняя функция $2x+3$, нижняя x^2 .

$$A = \int_{-1}^3 (2x+3-x^2) dx = [x^2+3x-x^3/3]_{-1}^3 = 9 - (-5/3) = 32/3 \text{ FE.}$$

Проверка. После замены $u=x-1$ высота равна $4-u^2$ на $[-2;2]$, как в задаче 7.

Где легко ошибиться. Не выбирайте $[0;3]$: левое пересечение находится при $x=-1$.

Повторить в конспекте: Площадь между графиками.

Задача 13

In einem Modell fließt Wasser mit der Rate $Q(t)=3e^{(0,2t)}$ Liter pro Minute in einen Behälter. t wird in Minuten gemessen. Wie viele Liter fließen von $t=0$ bis $t=5$ zu? Runden Sie erst am Ende auf zwei Dezimalstellen.

В учебной модели вода поступает со скоростью $Q(t)=3e^{(0,2t)}$ литра в минуту. t измеряется в минутах. Сколько литров поступит от $t=0$ до $t=5$? Округлите только ответ до сотых.

$$\text{Приращение объёма } \Delta V = \int_0^5 3e^{(0,2t)} dt.$$

Первообразная $15e^{(0,2t)}$, поскольку $15 \cdot 0,2 = 3$.

$$\Delta V = 15(e-1) \approx 25,77 \text{ Liter.}$$

Проверка. $3 \leq Q(t) \leq 3e$, поэтому $15 \leq \Delta V \leq 15e \approx 40,77$; результат внутри этих границ.

Где легко ошибиться. $5 \cdot Q(5)$ использует конечную скорость на всём промежутке и завышает количество.

Повторить в конспекте: Определённый интеграл и порядок границ.

Задача 14

Ein Körper bewegt sich geradlinig mit $v(t)=t^2-4$ m/s für $0 \leq t \leq 3$ s. Bestimmen Sie die Ortsänderung und die insgesamt zurückgelegte Strecke.

Тело движется по прямой со скоростью $v(t)=t^2-4$ м/с на $0 \leq t \leq 3$ с. Найдите перемещение и полный пройденный путь.

В допустимом промежутке $v=0$ при $t=2$; $F(t)=t^3/3-4t$.

Перемещение $\Delta s=F(3)-F(0)=-3$ м.

Путь $S=-(F(2)-F(0))+(F(3)-F(2))=16/3+7/3=23/3$ м $\approx 7,67$ м.

Проверка. $S \geq |\Delta s|$: $23/3 \geq 3$. Направление меняется ровно один раз.

Где легко ошибиться. Отрицательное перемещение допустимо; отрицательный путь — нет.

Повторить в конспекте: Как собрать несколько участков.

Задача 15

Für $a>0$ ist $f_a(x)=a x^2$ gegeben. Die Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse im Intervall $[0;2]$ beträgt 12 FE. Bestimmen Sie a .

Для $a>0$ задана $f_a(x)=a x^2$. Площадь под графиком на $[0;2]$ равна 12 FE. Найдите a .

$A(a)=a \int_0^2 x^2 dx = 8a/3$.

Из $8a/3=12$ получаем $a=9/2$.

Проверка. Подстановка даёт $(9/2) \cdot 8/3=12$; $a>0$ выполнено.

Где легко ошибиться. Условие $a>0$ позволяет составить площадь без отдельного рассмотрения знака параметра.

Повторить в конспекте: Если неизвестна граница или параметр.

Задача 16

Die Tangente an $y=x^2$ im Punkt mit $x=1$ sowie der Graph und die Geraden $x=0$ und $x=2$ begrenzen eine Fläche. Bestimmen Sie die Tangentengleichung und den Flächeninhalt.

Касательная к $y=x^2$ в точке $x=1$, график параболы и прямые $x=0$, $x=2$ ограничивают область. Найдите уравнение касательной и площадь.

$f'(x)=2x$, поэтому $k=2$, точка касания $(1;1)$. Касательная $t(x)=2x-1$.

$x^2-t(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2 \geq 0$.

$A=\int_0^2 (x-1)^2 dx = [(x-1)^3/3]_0^2 = 2/3$ FE.

Проверка. Касательная и график совпадают при $x=1$ и имеют там одинаковые производные; две части площади симметричны.

Где легко ошибиться. Одна касательная и парабола не замыкают конечную область без дополнительных границ $x=0$ и $x=2$.

Повторить в конспекте: Площадь между графиками.

Задача 17

Gegeben ist $f(x)=x(x-2)(x-4)$ für $0 \leq x \leq 4$. Bestimmen Sie alle Nullstellen, das bestimmte Integral auf $[0;4]$ und den Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse. Auf beiden Achsen gilt $1 \text{ LE} = 2 \text{ cm}$. Geben Sie die Fläche auch in cm^2 an.

Дана $f(x)=x(x-2)(x-4)$ на $[0;4]$. Найдите нули, определённый интеграл и площадь между графиком и осью. При масштабе $1 \text{ LE} = 2 \text{ см}$ по обеим осям выразите площадь также в см^2 .

Нули: $x=0, 2, 4$. Первообразная $F=x^4/4-2x^3+4x^2$.

$F(0)=0$, $F(2)=4$, $F(4)=0$; общий интеграл равен 0.

$A=(F(2)-F(0))-(F(4)-F(2))=4+4=8 \text{ FE}$.

При $1 \text{ FE} = 4 \text{ cm}^2$ получаем $A=32 \text{ cm}^2$.

Проверка. $F'=x^3-6x^2+8x$. Кроме того, $f(4-x)=-f(x)$, поэтому два знаковых вклада противоположны.

Где легко ошибиться. Нулевой интеграл не устраняет две области положительной площади; масштаб площади равен 2^2 .

Повторить в конспекте: Как собрать несколько участков.

Задача 18

Die Fläche unter $y=6-2x$ im Intervall $[0;3]$ wird durch $x=c$ mit $0 < c < 3$ geteilt. Der linke Teil soll doppelt so groß wie der rechte sein. Bestimmen Sie c exakt und näherungsweise.

Область под $y=6-2x$ на $[0;3]$ разделяют прямой $x=c$, где $0 < c < 3$. Левая часть должна быть вдвое больше правой. Найдите c точно и приближённо.

Полная площадь $A=[6x-x^2]_0^3=9 \text{ FE}$, поэтому левая должна равняться 6 FE.

$A_{\text{лев}}(c)=\int_0^c (6-2x)dx=6c-c^2$. Уравнение $6c-c^2=6$ даёт $c^2-6c+6=0$.

Корни $c=3 \pm \sqrt{3}$. Условию $0 < c < 3$ соответствует только $c=3-\sqrt{3} \approx 1,268$.

Тогда правая площадь $9-6=3 \text{ FE}$, и $6:3=2:1$.

Проверка. Для $c=3-\sqrt{3}$ выражение $6c-c^2$ равно 6; второй корень больше 3.

Где легко ошибиться. Отношение 2:1 означает доли $2/3$ и $1/3$, а не половину площади.

Повторить в конспекте: Если неизвестна граница или параметр.