

Авторский тренировочный вариант В: разборы

demidmath.com · Telegram: @demidmath

Это авторский тренировочный вариант Demid.Math по темам курса. Он не является реальным экзаменом ЕРМ или официальным образцом. 240 минут и 100 баллов — учебные ориентиры автора, а не официальный регламент или проходной балл.

Сверяй после собственной попытки. Критерии ниже являются авторской схемой оценки; равносильное верное решение подходит. Номера частей совпадают с отдельным листом заданий.

Aufgabe 1 · 10 Punkte

In einem Modell zerfällt eine Substanz exponentiell. Anfangs sind 80 mg vorhanden; die Halbwertszeit beträgt 5 Stunden. Die Bedingungen bleiben konstant, $t \geq 0$ wird in Stunden gemessen.

1a · 4 Punkte

Bestimmen Sie $N(t) = 80e^{(-\lambda t)}$ mit $\lambda > 0$ und den stündlichen Abnahmefaktor q .

За 5 часов остаётся половина, поэтому $e^{(-5\lambda)} = 1/2$. Значит, $\lambda = \ln(2)/5 \approx 0,1386294 \text{ ч}^{-1}$.

$N(t) = 80 \cdot e^{(-\ln(2) \cdot t/5)} = 80 \cdot 2^{(-t/5)}$ мг. Часовой множитель $q = e^{(-\lambda)} = 2^{(-1/5)} \approx 0,8705506$.

Проверка. При $t=5$ модель даёт 40 мг. Множитель q меньше 1, как и требуется для распада.

Где легко ошибиться. В форме $e^{(-\lambda t)}$ константа λ положительна; знак распада уже записан в показателе.

Критерии (4 б.): 1 — Условие полураспада; 1 — λ с единицами; 1 — Модель; 1 — Часовой множитель.

Повторить: M04-L01 — Полураспад и запись через e .

1b · 2 Punkte

Wie viel Substanz ist nach 15 Stunden vorhanden?

15 часов — три периода полураспада.

$N(15) = 80 \cdot 2^{-3} = 10$ мг.

Проверка. $80 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10$ мг за три последовательных периода по 5 часов.

Где легко ошибиться. Масса делится пополам повторно, а не уменьшается каждый раз на 40 мг.

Критерии (2 б.): 1 — Три периода или подстановка; 1 — 10 мг.

Повторить: M04-L01 — Количество через несколько периодов.

1c • 2 Punkte

Ab welchem Zeitpunkt sind höchstens 5 mg vorhanden?

$80 \cdot 2^{-(t/5)} \leq 5$ означает $2^{-(t/5)} \leq 1/16 = 2^{-4}$.

Отсюда $-t/5 \leq -4$ и $t \geq 20$. Впервые 5 мг остаётся через 20 часов; затем масса ещё меньше.

Проверка. $N(20) = 5$ мг, а функция строго убывает.

Где легко ошибиться. «Не больше» включает равенство. Для строго меньшей массы ответ был бы $t > 20$.

Критерии (2 б.): 1 — Верное неравенство; 1 — Граница и включение равенства.

Повторить: M04-L01 — Порог распада и граница неравенства.

1d • 2 Punkte

Berechnen und interpretieren Sie $N'(5)$.

$N'(t) = -\lambda N(t)$. Поскольку $N(5) = 40$ мг, имеем $N'(5) = -(\ln 2/5) \cdot 40 = -8 \ln 2 \approx -5,545177$ мг/ч.

В момент $t = 5$ ч масса убывает с мгновенной скоростью около 5,545 мг в час. Это не обязательно потеря за следующий целый час.

Проверка. Производная отрицательна, её единицы мг/ч, а не мг.

Где легко ошибиться. Не заменяй мгновенную скорость разностью $N(6) - N(5)$; это изменение за интервал.

Критерии (2 б.): 1 — Производная и значение; 1 — Смысл и единицы.

Повторить: M02-L03 — Мгновенная скорость модели.

Aufgabe 2 • 14 Punkte

Werk E liefert 60% aller Bauteile, Werk F die übrigen 40%. In E sind 2% der Bauteile fehlerhaft, in F 5%. D bezeichnet das Ereignis «fehlerhaft». Für Teil c werden neue, voneinander unabhängige Ziehungen aus derselben Mischung angenommen. Teil d beschreibt ein unabhängiges Messmodell.

2a • 3 Punkte

Berechnen Sie $P(D)$.

Есть два непересекающихся пути к браку: деталь из E или из F.

$P(D) = 0,60 \cdot 0,02 + 0,40 \cdot 0,05 = 0,012 + 0,020 = 0,032 = 3,2\%$.

Проверка. Итоговая доля находится между 2% и 5%, а веса поставок суммируются в 1.

Где легко ошибиться. Нельзя брать простое среднее 2% и 5%: доли заводов неодинаковы.

Критерии (3 б.): 2 — Взвешенная сумма двух путей; 1 — 0,032.

Повторить: M07-L01 — Полная вероятность.

2b • 3 Punkte

Ein Bauteil ist fehlerhaft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt es aus Werk F?

Нужна обратная условная вероятность $P(F|D)$, а не $P(D|F)$.

$$P(F|D) = P(F \cap D) / P(D) = (0,40 \cdot 0,05) / 0,032 = 0,020 / 0,032 = 5/8 = 0,625 = 62,5\%.$$

Проверка. В условной группе бракованных доли E и F равны $0,012/0,032 = 37,5\%$ и $62,5\%$; вместе 100%.

Где легко ошибиться. Число 5% отвечает на другой вопрос: доля брака среди продукции F.

Критерии (3 б.): 1 — Верное условное событие; 1 — Формула Байеса; 1 — 62,5%.

Повторить: M07-L01 — Байес и направление условного события.

2c • 4 Punkte

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter 5 unabhängig gezogenen Bauteilen mindestens eines fehlerhaft ist.

Каждый выбор имеет вероятность брака $p = 0,032$. Вероятность отсутствия брака во всех пяти равна $(1-p)^5 = 0,968^5$.

$$P(\text{хотя бы один брак}) = 1 - 0,968^5 = 0,1500824707 \approx 15,01\%.$$

Проверка. Ответ больше $p = 3,2\%$ для одной детали и меньше $5p = 16\%$; это согласуется с повторными независимыми выборами.

Где легко ошибиться. Сумма $5p$ считает некоторые исходы с несколькими бракованными деталями неоднократно.

Критерии (4 б.): 1 — Вероятность брака в смеси; 1 — Дополнительное событие; 1 — Степень 5; 1 — Численный ответ.

Повторить: M07-L02 — Хотя бы один через дополнение.

2d • 4 Punkte

Eine unabhängige Messgröße Z ist normalverteilt mit Mittelwert 500 mm und Standardabweichung 15 mm. Berechnen Sie $P(485 \text{ mm} \leq Z \leq 530 \text{ mm})$.

$$\text{Стандартизируем обе границы: } z_1 = (485 - 500) / 15 = -1, \quad z_2 = (530 - 500) / 15 = 2.$$

$$\text{Вероятность равна } \Phi(2) - \Phi(-1) \approx 0,9772499 - 0,1586553 = 0,8185946 \approx 81,86\%.$$

Проверка. Интервал содержит среднее и простирается на одну σ влево и на две σ вправо. Вероятность больше вероятности центрального интервала $\pm \sigma$, но меньше 1.

Где легко ошибиться. Вычитают значения функции распределения на обеих границах. Поправка на непрерывность для уже заданной непрерывной нормальной величины не нужна.

Критерии (4 б.): 2 — Обе стандартизованные границы; 1 — Разность Φ ; 1 — Численный результат.

Повторить: M07-L03 — Вероятность между нормальными границами.

Aufgabe 3 • 10 Punkte

Für ein Dreieck ABC sind $a = 8 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm}$ und $\alpha = 40^\circ$ gegeben. Die Seiten a, b, c liegen den Winkeln α, β, γ gegenüber. Gesucht sind alle nicht entarteten Dreiecke, die diese Angaben erfüllen.

3a • 4 Punkte

Bestimmen Sie alle möglichen Werte von β und begründen Sie, wie viele Dreiecke möglich sind.

По теореме синусов $\sin \beta = b \sin \alpha / a = (10/8) \sin 40^\circ \approx 0,8034845$.

Первая ветвь $\beta_1 \approx 53,46415^\circ$, вторая $\beta_2 = 180^\circ - \beta_1 \approx 126,53585^\circ$. Обе меньше $140^\circ = 180^\circ - \alpha$, поэтому обе оставляют положительный третий угол. Возможны два треугольника.

Проверка. Высота $h = b \sin \alpha \approx 6,427876$ см. Выполнено $h < a < b$: $6,427876 < 8 < 10$, что соответствует двум решениям SSA.

Где легко ошибиться. Калькулятор $\arcsin$ возвращает только одну ветвь; требуется проверить также дополнительный угол.

Критерии (4 б.): 1 — Уравнение для $\sin \beta$; 1 — Первая ветвь; 1 — Вторая ветвь; 1 — Допустимость двух треугольников.

Повторить: M05-L05 — Два решения в случае SSA.

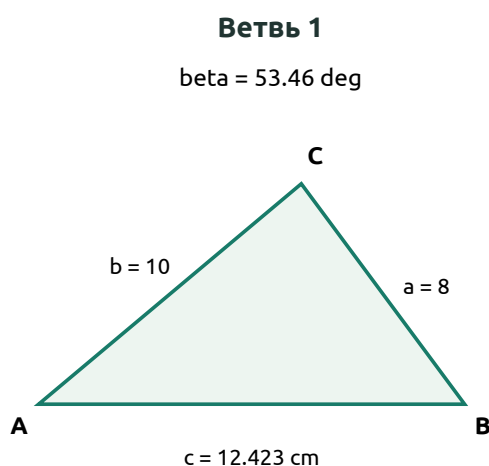
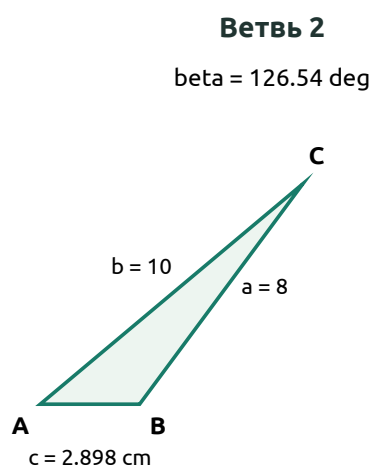
3b • 4 Punkte

Berechnen Sie für beide Fälle γ und c . Ordnen Sie die Werte eindeutig zu.

В первой ветви $\gamma_1 = 180^\circ - 40^\circ - 53,46415^\circ \approx 86,53585^\circ$. По теореме синусов $c_1 = 8 \sin \gamma_1 / \sin 40^\circ \approx 12,42305$ см.

Во второй ветви $\gamma_2 \approx 13,46415^\circ$, $c_2 = 8 \sin \gamma_2 / \sin 40^\circ \approx 2,897839$ см.

Итог: $(\beta_1, \gamma_1, c_1) \approx (53,46^\circ; 86,54^\circ; 12,42 \text{ см})$, $(\beta_2, \gamma_2, c_2) \approx (126,54^\circ; 13,46^\circ; 2,898 \text{ см})$.



Обе допустимые конфигурации с $a=8$ см, $b=10$ см и $\alpha=40^\circ$. Основание c и угол β различаются; значения в каждой ветви нельзя смешивать.

Проверка. В обеих ветвях сумма углов 180° . Самой длинной стороне соответствует самый большой угол; в первом случае это c_1 и γ_1 , во втором — b и β_2 .

Где легко ошибиться. Не смешивай c из одной ветви с γ из другой; промежуточные углы сохраняй без раннего округления.

Критерии (4 б.): 1 — Оба γ ; 1 — Формула для c ; 2 — Обе стороны и соответствие ветвей.

Повторить: M05-L05 — Доведение обеих ветвей до сторон.

3c • 2 Punkte

Berechnen Sie die beiden Flächeninhalte.

Угол α заключён между b и c , поэтому $S = (1/2)bc \sin \alpha$.

$$S_1 = 5c_1 \sin 40^\circ \approx 39,92691 \text{ см}^2; S_2 = 5c_2 \sin 40^\circ \approx 9,313476 \text{ см}^2.$$

Проверка. Если основанием взять c , высота из противоположной вершины в обеих конфигурациях равна $b \sin 40^\circ \approx 6,427876 \text{ см}$; поэтому $S_1/S_2 = c_1/c_2$.

Где легко ошибиться. Стороны a и b не образуют заданный угол α ; в формуле с этим углом используются b и c .

Критерии (2 б.): 1 — Верная формула; 1 — Обе площади с единицами.

Повторить: M05-L05 — Площадь в каждой конфигурации.

Aufgabe 4 • 12 Punkte

Gegeben sind $A(1|1)$, $B(5|1)$ und $C(1|4)$. Rechnen Sie möglichst exakt.

4a • 4 Punkte

Bestimmen Sie eine Normalform der Geraden BC und den Abstand des Punktes A von BC .

Направление $BC = (-4, 3)$, поэтому нормалью можно взять $n = (3, 4)$. Подстановка B даёт $3x + 4y = 19$.

$$\text{Расстояние } d = |3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 19| / \sqrt{(3^2 + 4^2)} = 12/5 = 2,4 \text{ LE.}$$

Проверка. C тоже даёт $3 + 16 = 19$. Площадь прямоугольного треугольника ABC равна $4 \cdot 3/2 = 6$; она также равна $|BC| \cdot d/2 = 5 \cdot (12/5)/2 = 6$.

Где легко ошибиться. Нормаль должна быть перпендикулярна направлению прямой, а формула расстояния требует деления на её длину.

Критерии (4 б.): 1 — Нормаль; 1 — Уравнение BC ; 1 — Формула расстояния; 1 — $12/5 \text{ LE}$.

Повторить: M06-L01 — Нормальная форма и расстояние.

4b • 4 Punkte

Bestimmen Sie den Lotfußpunkt H von A auf BC und den Spiegelpunkt A' von A an BC .

Идём из A по нормали: $H = (1, 1) + t(3, 4)$. В уравнении прямой $3(1+3t) + 4(1+4t) = 19$, то есть $7 + 25t = 19$ и $t = 12/25$.

$$H = (61/25 | 73/25). \text{ Отражение } A' = 2H - A = (97/25 | 121/25).$$

Проверка. $3 \cdot 61/25 + 4 \cdot 73/25 = 19$. Середина AA' равна H , а $A' - A = (72/25, 96/25)$ параллелен нормали $(3, 4)$.

Где легко ошибиться. Основание перпендикуляра — середина отрезка до отражённой точки; H и A' не совпадают.

Критерии (4 б.): 1 — Проекция вдоль нормали; 1 — H ; 1 — Формула отражения; 1 — A' .

Повторить: M06-L01 — Проекция и отражение.

4c • 4 Punkte

Bestimmen Sie den Umkreismittelpunkt O , den Radius und die Kreisgleichung.

AB горизонтальна, AC вертикальна: угол A прямой. Центр описанной окружности прямоугольного треугольника — середина гипотенузы BC .

$O = ((5+1)/2 | (1+4)/2) = (3 | 5/2)$. Длина $BC=5$, поэтому $R=5/2$.

Уравнение: $(x-3)^2 + (y-5/2)^2 = 25/4$.

Проверка. Для A расстояние в квадрате $4+9/4=25/4$; B даёт то же, C — $4+9/4$. Все три вершины на окружности.

Где легко ошибиться. Середина произвольной стороны не всегда центр окружности. Здесь используется доказанный прямой угол и гипотенуза BC .

Критерии (4 б.): 1 — Прямой угол или иной корректный способ; 1 — Центр; 1 — Радиус; 1 — Уравнение.

Повторить: M05-L02 — Окружность прямоугольного треугольника.

Aufgabe 5 • 14 Punkte

Gegeben sind die Ebene $E: x+2y+2z=6$, die Gerade $g: X=(2|-1|0)+t(1|1|1)$ und der Punkt $P(0|0|0)$.

5a • 5 Punkte

Bestimmen Sie den Schnittpunkt S von g und E und zeigen Sie, dass er eindeutig ist.

Подставляем $x=2+t$, $y=-1+t$, $z=t$ в плоскость: $2+t+2(-1+t)+2t=6$.

Получаем $5t=6$, $t=6/5$. Тогда $S=(16/5 | 1/5 | 6/5)$.

Коэффициент при t ненулевой, поэтому решение единственно. Равносильно: нормаль $n=(1,2,2)$ имеет $n \cdot (1,1,1)=5 \neq 0$.

Проверка. $16/5+2/5+12/5=30/5=6$. Координаты S получены с одним и тем же $t=6/5$.

Где легко ошибиться. При пересечении прямой с плоскостью у всех координат один параметр t .

Критерии (5 б.): 2 — Подстановка и уравнение; 1 — Параметр; 1 — Точка; 1 — Единственность.

Повторить: M06-L02 — Пересечение прямой с плоскостью.

5b • 4 Punkte

Berechnen Sie den spitzen Winkel zwischen g und E .

Направление прямой $v=(1,1,1)$, нормаль плоскости $n=(1,2,2)$. Для угла α с плоскостью $\sin \alpha = |v \cdot n| / (|v| |n|)$.

$\sin \alpha = 5/(\sqrt{3} \cdot 3)$, поэтому $\alpha \approx 74,20683^\circ \approx 74,21^\circ$.

Проверка. Угол с нормалью равен $\arccos(5/(3\sqrt{3})) \approx 15,79317^\circ$. Его дополнение до 90° даёт найденный угол с плоскостью.

Где легко ошибиться. $\arccos$ скалярного отношения даёт угол с нормалью, а не непосредственно с плоскостью.

Критерии (4 б.): 1 — Направление и нормаль; 1 — Синус угла с плоскостью; 1 — Скалярное отношение; 1 — Угол в градусах.

Повторить: M06-L02 — Угол прямой с плоскостью.

5c • 5 Punkte

Bestimmen Sie den Abstand von P zu E, den Lotfußpunkt H und den Spiegelpunkt P' an E.

$$d = |0+0+0-6|/\sqrt{(1+4+4)} = 6/3 = 2 \text{ LE.}$$

Проекция лежит на нормали через P: $H = s(1, 2, 2)$. Подстановка в плоскость даёт $s+4s+4s=6$, поэтому $s=2/3$.

$$H = (2/3|4/3|4/3). \text{ Отражение } P' = 2H - P = (4/3|8/3|8/3).$$

Проверка. H лежит в E, $|PH| = \sqrt{(4/9+16/9+16/9)} = 2$. Точки P и P' равноудалены от E и находятся по разные стороны; H — их середина.

Где легко ошибиться. Расстояние — число, проекция — точка, отражение — другая точка. Их нельзя подменять друг другом.

Критерии (5 б.): 1 — Расстояние; 1 — Проекция вдоль нормали; 1 — H; 1 — Формула отражения; 1 — P'.

Повторить: M06-L02 — Расстояние и отражение в плоскости.

Aufgabe 6 • 16 Punkte

Eine Polynomfunktion dritten Grades besitzt den Wendepunkt $W(0|2)$. Ihre Tangente in W ist parallel zu $y = -3x + 7$. Außerdem verläuft der Graph durch $P(1|0)$.

6a • 6 Punkte

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x)$.

Пусть $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$. Из $f(0) = 2$ получаем $d = 2$; из $f''(0) = 0$ — $2b = 0$, $b = 0$.

Параллельность касательной задаёт $f'(0) = -3$, поэтому $c = -3$. Точка P даёт $f(1) = a - 3 + 2 = 0$, откуда $a = 1$.

Итак, $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Старший коэффициент ненулевой, степень действительно третья.

Проверка. $f(0) = 2$, $f'(0) = -3$, $f''(0) = 0$, $f(1) = 0$. Свойство перегиба отдельно проверяется в части c.

Где легко ошибиться. Свободный член 7 исходной прямой не задаёт высоту касательной: требуется только параллельность.

Критерии (6 б.): 1 — Общий кубический вид; 2 — Условия точки перегиба; 1 — Условие наклона; 1 — Использование P; 1 — Верная функция.

Повторить: M01-L01 — Перевод условий в коэффициенты.

6b • 6 Punkte

Bestimmen Sie alle reellen Nullstellen mit ihren Vielfachheiten und alle lokalen Extrempunkte.

$f(x)=(x-1)^2(x+2)$, поэтому $x=1$ — двойной нуль, $x=-2$ — простой.

$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$, стационарные абсциссы -1 и 1 . Вторая производная $f''(x)=6x$.

$f''(-1)=-6<0$ и $f(-1)=4$: максимум $H(-1|4)$. $f''(1)=6>0$ и $f(1)=0$: минимум $T(1|0)$.

Проверка. Раскрытие $(x-1)^2(x+2)$ даёт x^3-3x+2 . Знак f' меняется $+\rightarrow-$ при -1 и $-\rightarrow+$ при 1 .

Где легко ошибиться. Нуль функции и нуль производной — разные условия. В $x=1$ они совпали, но это не общее правило.

Критерии (6 б.): 2 — Оба нуля с кратностями; 1 — Производная и стационарные абсциссы; 2 — Координаты экстремумов; 1 — Обоснование типов.

Повторить: M02-L03 — Нули и локальные экстремумы.

6c • 4 Punkte

Überprüfen Sie, dass W tatsächlich ein Wendepunkt ist, und bestimmen Sie die Wendetangente.

$f''(x)=6x$ меняет знак с отрицательного на положительный при $x=0$. Поэтому $W=(0|2)$ действительно точка перегиба. Также $f'''(0)=6\neq 0$.

Наклон $f'(0)=-3$, значит касательная $y=2-3x$. Она параллельна заданной прямой $y=-3x+7$.

Проверка. Касательная имеет в $x=0$ высоту 2, как и f , а не высоту 7.

Где легко ошибиться. Равенства $f''(0)=0$ без смены знака или другого достаточного признака ещё мало для подтверждения перегиба.

Критерии (4 б.): 2 — Достаточная проверка перегиба; 1 — Наклон и точка; 1 — Уравнение касательной.

Повторить: M02-L01 — Перегиб и касательная в нём.

Aufgabe 7 • 12 Punkte

Die Graphen $f(x)=\sqrt{x}$ und $g(x)=x/2$ begrenzen eine endliche Fläche im ersten Quadranten. Diese Fläche rotiert um die x -Achse. Längen, Flächen und Volumina werden in LE, FE und VE angegeben; es ist kein zusätzlicher Maßstab gegeben.

7a • 3 Punkte

Bestimmen Sie die Schnittpunkte und die Lage der Graphen zwischen ihnen.

Область $\sqrt{x}$ требует $x\geq 0$. Уравнение $\sqrt{x}=x/2$ имеет неотрицательные обе части; после возведения в квадрат $x=x^2/4$, поэтому $x=0$ или $x=4$.

Точки $(0|0)$, $(4|2)$. На $0<x<4$ имеем $\sqrt{x}>x/2$, потому что это равносильно $2>\sqrt{x}$ после деления на $\sqrt{x}>0$.

Проверка. Оба найденных x подходят исходному уравнению. При $x=1$ высоты равны 1 и $1/2$.

Где легко ошибиться. После возведения в квадрат корни возвращают в исходное равенство и проверяют область определения.

Критерии (3 б.): 1 — Область и допустимое преобразование; 1 — Пересечения; 1 — Порядок графиков.

Повторить: M03-L01 — Пересечение графиков с корнем.

7b • 3 Punkte

Berechnen Sie den Flächeninhalt der begrenzten Fläche.

$$A = \int_0^4 (\sqrt{x} - x/2) dx = [(2/3)x^{3/2} - x^2/4]_0^4.$$

$$A = 16/3 - 4 = 4/3 \text{ FE.}$$

Проверка. Разность графиков положительна на всём внутреннем промежутке, поэтому итог положителен без разбиения на дополнительные части.

Где легко ошибиться. Интеграл $\sqrt{x}$ равен $(2/3)x^{3/2}$, а не $2\sqrt{x}$.

Критерии (3 б.): 1 — Интеграл разности; 1 — Первообразная; 1 — $4/3$ FE.

Повторить: M03-L01 — Первообразная степени и площадь.

7c • 6 Punkte

Berechnen Sie das Rotationsvolumen. Beschreiben Sie das Querschnittsmodell.

При $0 \leq x \leq 4$ внешний радиус $R = \sqrt{x}$, внутренний $r = x/2$. Сечение перпендикулярно оси x является кольцом.

$$V = \pi \int_0^4 [(\sqrt{x})^2 - (x/2)^2] dx = \pi \int_0^4 (x - x^2/4) dx.$$

$$V = \pi [x^2/2 - x^3/12]_0^4 = \pi(8 - 16/3) = 8\pi/3 \text{ VE} \approx 8,378 \text{ VE.}$$

Проверка. Радиусы неотрицательны, $R \geq r$; при $x=0$ и 4 они совпадают. Численное интегрирование площади колец подтверждает результат.

Где легко ошибиться. Площадь кольца нельзя заменить квадратом разности графиков. Без заданного масштаба объём остаётся в VE, а не в cm^3 .

Критерии (6 б.): 2 — Радиусы и кольцевая модель; 2 — Верный интеграл; 1 — Точный объём; 1 — Единицы и проверка.

Повторить: M03-L02 — Объём методом колец.

Aufgabe 8 • 12 Punkte

Die beiden Teilaufgaben sind unabhängig voneinander.

8a • 4 Punkte

Untersuchen Sie für alle $a \in \mathbb{R}$ die reellen Nullstellen von $f_a(x) = x^2 - 4x + a$. Für welches a berührt der Graph die x -Achse, und wo?

$f_a(x) = (x-2)^2 + a - 4$. При $a < 4$ два нуля $x = 2 \pm \sqrt{4-a}$; при $a = 4$ один двойной нуль $x = 2$; при $a > 4$ нулей нет.

Касание оси происходит при $a = 4$ в точке $(2|0)$, поскольку $f_4 = (x-2)^2$.

Проверка. $\Delta = 16 - 4a$ имеет знаки $+, 0, -$ в тех же случаях. $f'_4(2) = 0$ и $f_4(2) = 0$.

Где легко ошибиться. a — свободный член, а не старший коэффициент: уравнение остаётся квадратным при любом a .

Критерии (4 б.): 2 — Все три случая и корни; 1 — Параметр касания; 1 — Точка и проверка касания.

Повторить: M01-L02 — Число корней и касание оси.

8b · 8 Punkte

Eine geschlossene zylindrische Dose mit zwei kreisförmigen Böden soll das Volumen $128\pi \text{ cm}^3$ haben. Bestimmen Sie Radius und Höhe für die kleinstmögliche gesamte Oberfläche und begründen Sie die globale Minimalität.

Полная поверхность $O=2\pi r^2+2\pi rh$, объём $\pi r^2 h=128\pi$, $r, h>0$. Отсюда $h=128/r^2$ и $O(r)=2\pi r^2+256\pi/r$ при $r>0$.

$O'(r)=4\pi r-256\pi/r^2$. Уравнение $O'=0$ равносильно $r^3=64$, поэтому $r=4$ см. Тогда $h=128/16=8$ см.

$O_{\min}=2\pi \cdot 16+2\pi \cdot 4 \cdot 8=96\pi \text{ см}^2 \approx 301,6 \text{ см}^2$.

$O'(r)=4\pi(r^3-64)/r^2$ отрицательна при $0<r<4$ и положительна при $r>4$. Кроме того, $O \rightarrow +\infty$ при $r \rightarrow 0+$ и $r \rightarrow +\infty$. Значит, найденный минимум глобальный.

Проверка. $\pi \cdot 4^2 \cdot 8=128\pi \text{ см}^3$. В оптимуме $h=2r$, как следует и из найденных уравнений.

Где легко ошибиться. Банка закрыта: нужны оба основания. Если удалить одно основание из модели, получится другая задача.

Критерии (8 б.): 2 — Поверхность, объём и допустимые значения; 2 — Сведение к r и производная; 2 — r, h и минимальная поверхность; 2 — Обоснование глобального минимума.

Повторить: M02-L08 — Оптимизация закрытого цилиндра.