

Авторский тренировочный вариант А: разборы

demidmath.com · Telegram: @demidmath

Это авторский тренировочный вариант Demid.Math по темам курса. Он не является реальным экзаменом ЕРМ или официальным образцом. 240 минут и 100 баллов — учебные ориентиры автора, а не официальный регламент или проходной балл.

Сверяй после собственной попытки. Критерии ниже являются авторской схемой оценки; равносильное верное решение подходит. Номера частей совпадают с отдельным листом заданий.

Aufgabe 1 · 10 Punkte

In einem Modell wächst die Biomasse exponentiell. Zu Beginn beträgt sie 125 g, nach 3 Stunden 216 g. Die Wachstumsbedingungen bleiben unverändert; t wird in Stunden ab Beginn gemessen.

1a · 4 Punkte

Bestimmen Sie ein Modell $N(t)=N_0 \cdot q^t$ und die stündliche relative Zunahme.

$N_0=125$. Из $N(3)=216$ следует $q^3=216/125=(6/5)^3$, поэтому $q=6/5=1,2$.

Модель $N(t)=125 \cdot 1,2^t$ г при $t \geq 0$. Относительный прирост за час $q-1=0,2$, то есть 20%.

Проверка. При $t=0$ получаем 125 г, при $t=3$ — $125 \cdot 1,728=216$ г.

Где легко ошибиться. $216/125$ — множитель за три часа, а не за один час.

Критерии (4 б.): 1 — Уравнение для q по двум данным; 2 — Верный часовой множитель и модель; 1 — Прирост 20%.

Повторить: M04-L01 — Модель по двум измерениям.

1b · 3 Punkte

Berechnen Sie die Biomasse nach 6 Stunden.

$N(6)=125 \cdot 1,2^6=373,248$ г.

Это примерно 373,2 г при округлении до четырёх значащих цифр.

Проверка. От третьего до шестого часа проходит ещё три часа: $216 \cdot (216/125)=373,248$ г.

Где легко ошибиться. Линейно прибавлять каждые три часа по 91 г нельзя: задан экспоненциальный рост.

Критерии (3 б.): 1 — Подстановка $t=6$; 2 — Число и единицы.

Повторить: M04-L01 — Подстановка в экспоненциальную модель.

1c • 3 Punkte

Nach welcher Zeit erreicht die Biomasse erstmals 500 g? Geben Sie die Zeit in Stunden an.

$$125 \cdot 1,2^t = 500, \text{ поэтому } 1,2^t = 4.$$

$t = \ln(4) / \ln(1,2) \approx 7,603568$ часа, то есть около 7,604 часа. Так как $q > 1$, функция строго возрастает и это первое достижение.

Проверка. Подстановка точного выражения t возвращает $125 \cdot 4 = 500$ г.

Где легко ошибиться. Делить 500 на часовой прирост 20% вместо решения показательного уравнения нельзя.

Критерии (3 б.): 1 — Показательное уравнение; 1 — Логарифмическая формула времени; 1 — Число, единицы и первое достижение.

Повторить: M04-L01 — Время достижения уровня.

Aufgabe 2 • 14 Punkte

Ein zufällig ausgewähltes Bauteil besitzt mit Wahrscheinlichkeit 0,30 ein bestimmtes Merkmal. Für alle folgenden Stichproben werden die Merkmale verschiedener Bauteile als unabhängig mit unveränderter Wahrscheinlichkeit modelliert.

2a • 5 Punkte

Unter 10 Bauteilen zählt X die Bauteile mit diesem Merkmal. Geben Sie die Verteilung von X an und berechnen Sie $P(X=2)$.

Есть фиксированные 10 независимых испытаний с двумя исходами и одной вероятностью $p=0,30$. Поэтому $X \sim B(10; 0,30)$.

$$P(X=2) = C(10,2) \cdot 0,30^2 \cdot 0,70^8 = 45 \cdot 0,09 \cdot 0,05764801 = 0,2334744405 \approx 23,35\%.$$

Проверка. Множитель $C(10,2)=45$ учитывает все расположения двух успехов. Вероятность одной последовательности равна $0,30^2 \cdot 0,70^8$.

Где легко ошибиться. Выражение $0,30^2$ не учитывает ни восемь остальных деталей, ни возможные позиции двух успехов.

Критерии (5 б.): 2 — Биномиальная модель с параметрами и её предпосылками; 2 — Полная формула вероятности; 1 — Численный результат.

Повторить: M07-L02 — Биномиальная модель и ровно k успехов.

2b • 4 Punkte

Wie viele Bauteile müssen mindestens betrachtet werden, damit mit mindestens 95% Wahrscheinlichkeit wenigstens eines das Merkmal besitzt?

Вероятность хотя бы одного успеха среди n равна $1 - 0,70^n$. Нужно $1 - 0,70^n \geq 0,95$, то есть $0,70^n \leq 0,05$.

После логарифмирования $n \geq \ln(0,05)/\ln(0,70) \approx 8,399054$. Минимальное целое $n=9$.

Проверка. Для $n=8$ вероятность $0,94235199 < 0,95$; для $n=9$ — $0,959646393 \geq 0,95$.

Где легко ошибиться. При делении на отрицательное $\ln(0,70)$ знак неравенства меняется; число испытаний округляют вверх.

Критерии (4 б.): 1 — Дополнительное событие и неравенство; 1 — Верное решение неравенства; 1 — Минимальное целое 9; 1 — Проверка соседних целых.

Повторить: M07-L02 — Минимальное число попыток.

2c • 5 Punkte

Für eine Stichprobe von 200 Bauteilen sei Y die Anzahl mit diesem Merkmal. Nähern Sie $P(Y \geq 70)$ durch eine Normalverteilung mit Stetigkeitskorrektur an. Geben Sie auch die exakte binomiale Summe an; diese muss nicht numerisch ausgewertet werden.

$Y \sim B(200; 0,30)$, $\mu = np = 60$ и $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{42} \approx 6,480741$. Оба ожидаемых числа исходов 60 и 140 велики, поэтому нормальное приближение разумно.

Для события $Y \geq 70$ используем непрерывную границу 69,5. Вероятность примерно $1 - \Phi((69,5 - 60)/\sqrt{42}) = 1 - \Phi(1,465882) \approx 0,07134024 \approx 7,134\%$.

Точная сумма: $\sum_{k=70}^{200} C(200, k) \cdot 0,30^k \cdot 0,70^{200-k}$.

Проверка. Независимое суммирование даёт около 0,07278646. Это близко к приближению, но не равно ему; обе вероятности выше нуля и ниже 0,5, поскольку граница находится выше среднего.

Где легко ошибиться. Граница для $Y \geq 70$ — 69,5. Нормальное приближение нельзя называть точной биномиальной вероятностью.

Критерии (5 б.): 1 — μ и σ ; 1 — Граница 69,5; 1 — Стандартизация и численный результат; 2 — Точная биномиальная сумма с правильными границами.

Повторить: M07-L03 — Поправка на непрерывность.

Aufgabe 3 • 10 Punkte

In einem Dreieck ABC gilt $b=7$ cm, $c=10$ cm und $\alpha=60^\circ$. Wie üblich liegen die Seiten a, b, c den Winkeln α, β, γ gegenüber.

3a • 3 Punkte

Fertigen Sie eine beschriftete Skizze an und berechnen Sie a .

Угол α находится между известными сторонами b и c . По теореме косинусов $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha = 49 + 100 - 140 \cdot 1/2 = 79$.

$$a = \sqrt{79} \approx 8,888 \text{ см.}$$

Проверка. Неравенство треугольника выполняется: $|10 - 7| < \sqrt{79} < 10 + 7$.

Где легко ошибиться. Теорема Пифагора здесь не подходит: известный угол 60° , а не 90° .

Критерии (3 б.): 1 — Верная схема и выбор формулы; 1 — Подстановка; 1 — $a = \sqrt{79}$ и единицы.

Повторить: M05-L05 — Две стороны и угол между ними.

3b • 4 Punkte

Berechnen Sie die Winkel β und γ . Begründen Sie die Wahl des Winkels β .

По теореме синусов $\sin \beta = b \sin \alpha / a = 7 \sin 60^\circ / \sqrt{79}$. Калькулятор даёт $\beta \approx 43,00391^\circ$.

Вторая ветвь $180^\circ - 43,00391^\circ \approx 136,99609^\circ$ невозможна: уже вместе с $\alpha = 60^\circ$ сумма больше 180° .
Значит, $\beta \approx 43,00^\circ$, $\gamma = 180^\circ - 60^\circ - \beta \approx 77,00^\circ$.

Проверка. Самой длинной стороне $c = 10$ соответствует самый большой угол $\gamma \approx 77^\circ$. Сумма углов равна 180° .

Где легко ошибиться. После $\arcsin$ возможную дополнительную ветвь проверяют по геометрии, а не автоматически принимают или отбрасывают.

Критерии (4 б.): 1 — Формула для $\sin \beta$; 1 — Число β ; 1 — Отклонена невозможная ветвь; 1 — Угол γ .

Повторить: M05-L05 — Углы и проверка ветви $\arcsin$.

3c • 3 Punkte

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.

$$S = (1/2)bc \sin \alpha = 35 \sin 60^\circ = (35\sqrt{3})/2 \text{ см}^2.$$

$$S \approx 30,31 \text{ см}^2.$$

Проверка. В декартовой схеме $A = (0,0)$, $B = (10,0)$, $C = (7 \cos 60^\circ, 7 \sin 60^\circ)$ высота к AB равна $7\sqrt{3}/2$; половина произведения основания и высоты даёт тот же результат.

Где легко ошибиться. В формуле площади нужен угол между выбранными сторонами и множитель $1/2$.

Критерии (3 б.): 1 — Формула с нужным углом; 1 — Точный или верный численный результат; 1 — Квадратные единицы.

Повторить: M05-L05 — Площадь через стороны и угол.

Aufgabe 4 • 12 Punkte

Gegeben sind $A(0|0)$, $B(6|0)$ und $C(2|4)$. Eine Längeneinheit wird mit LE, eine Flächeneinheit mit FE bezeichnet.

4a • 3 Punkte

Bestimmen Sie den Höhenfußpunkt H von C auf AB, die Höhe und den Flächeninhalt von ABC.

AB liegt на $y=0$. Перпендикуляр из C вертикален, поэтому $H=(2|0)$, $CH=4$ LE.

$$S=AB \cdot CH/2=6 \cdot 4/2=12 \text{ FE.}$$

Проверка. Половина модуля определителя $AB=(6,0)$, $AC=(2,4)$ равна $|24|/2=12$.

Где легко ошибиться. Точка H должна лежать на прямой AB, а CH — быть перпендикулярным ей.

Критерии (3 б.): 1 — H; 1 — Высота; 1 — Площадь.

Повторить: M05-L02 — Высота и площадь по координатам.

4b • 4 Punkte

Bestimmen Sie den Kreismittelpunkt O und die Gleichung des Kreises.

Серединный перпендикуляр к AB задаёт $x=3$. Пусть $O=(3|y)$. Равенство $OA^2=OC^2$ даёт $9+y^2=1+(y-4)^2$.

После сокращения y^2 получаем $9=17-8y$, откуда $y=1$. Значит, $O=(3|1)$, $R^2=OA^2=10$.

$$\text{Окружность: } (x-3)^2+(y-1)^2=10.$$

Проверка. Подстановка A,B,C даёт соответственно 9+1, 9+1, 1+9: все суммы равны 10.

Где легко ошибиться. В правой части уравнения окружности стоит $R^2=10$, а не $R=\sqrt{10}$.

Критерии (4 б.): 1 — Уравнения серединных перпендикуляров или равных расстояний; 1 — Центр; 1 — R^2 ; 1 — Уравнение окружности.

Повторить: M05-L02 — Описанная окружность.

4c • 2 Punkte

Spiegeln Sie C an der Geraden AB.

Ось отражения — $y=0$. Координата x сохраняется, координата y меняет знак.

$$C'=(2|-4).$$

Проверка. Середина CC' равна $H=(2|0)$, а вектор $CC'=(0,-8)$ перпендикулярен $AB=(6,0)$.

Где легко ошибиться. При отражении относительно AB меняется знак высоты, а не обеих координат.

Критерии (2 б.): 1 — Способ отражения; 1 — Координаты C' .

Повторить: M06-L01 — Отражение относительно прямой.

4d • 3 Punkte

Bestimmen Sie die Tangente an den Kreis im Punkt B.

Радиус $OB=B-O=(3,-1)$ является нормалью касательной.

Через $B=(6|0)$ получаем $3(x-6)-(y-0)=0$, то есть $3x-y-18=0$.

Проверка. В удовлетворяет уравнению. Направление касательной $(1,3)$ имеет скалярное произведение $3-3=0$ с радиусом $(3,-1)$.

Где легко ошибиться. Радиус задаёт нормаль касательной, а не её направляющий вектор.

Критерии (3 б.): 1 — Радиус как нормаль; 1 — Уравнение через B; 1 — Проверка перпендикулярности.

Повторить: M05-L02 — Касательная к окружности.

Aufgabe 5 • 14 Punkte

Gegeben sind $A(1|0|1)$, $B(3|0|2)$, $C(1|2|2)$, $Q(5/2|3/2|5/2)$ und die Gerade $g: X=(0|1|0)+t(1|1|1)$, $t \in \mathbb{R}$.

5a • 5 Punkte

Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E durch A, B, C .

$u=AB=(2,0,1)$, $v=AC=(0,2,1)$. Их векторное произведение $(-2,-2,4)$ не равно нулю, поэтому точки задают плоскость.

Можно выбрать нормаль $n=(1,1,-2)$. Из $n \cdot A=1+0-2=-1$ получаем $E: x+y-2z=-1$.

Проверка. A даёт -1 , B даёт $3-4=-1$, C даёт $1+2-4=-1$. Также $n \cdot u=0$ и $n \cdot v=0$.

Где легко ошибиться. Свободный член плоскости находится подстановкой известной точки; он не равен автоматически нулю.

Критерии (5 б.): 1 — Два направления; 2 — Ненулевая нормаль; 1 — Свободный член; 1 — Уравнение плоскости.

Повторить: M06-L02 — Плоскость через три точки.

5b • 4 Punkte

Untersuchen Sie die Lage von g zu E und berechnen Sie den Abstand zwischen g und E .

Для направления g : $n \cdot (1,1,1)=1+1-2=0$, значит g параллельна E или лежит в ней.

Точка $P=(0,1,0)$ даёт $x+y-2z=1$, а не -1 . Поэтому g параллельна плоскости и не лежит в ней.

Расстояние равно расстоянию любой точки прямой до E :

$$d=|0+1-0+1|/\sqrt{(1^2+1^2+(-2)^2)}=2/\sqrt{6} \approx 0,8165 \text{ LE.}$$

Проверка. Подстановка всей прямой в левую часть даёт $t+(1+t)-2t=1$ при любом t ; пересечений нет.

Где легко ошибиться. Нулевое скалярное произведение направления и нормали ещё не отличает лежащую в плоскости прямую от отдельной параллельной.

Критерии (4 б.): 1 — Перпендикулярность направления нормали; 1 — Проверка точки и верное взаимное положение; 2 — Расстояние с нормировкой.

Повторить: M06-L02 — Прямая и плоскость, расстояние.

5c • 5 Punkte

Das Parallelogramm hat den Eckpunkt A und die Seitenvektoren AB und AC. Prüfen Sie, ob Q zum Parallelogramm und zum Dreieck ABC gehört. Begründen Sie beide Antworten.

Запишем $Q=A+s\cdot AB+r\cdot AC$. Из x: $1+2s=5/2$, поэтому $s=3/4$. Из y: $2r=3/2$, поэтому $r=3/4$.

Координата z согласуется: $1+s+r=5/2$. Так как $0\leq s,r\leq 1$, Q принадлежит параллелограмму.

Для треугольника дополнительно нужно $s+r\leq 1$. Здесь $s+r=3/2>1$, поэтому Q не принадлежит треугольнику ABC.

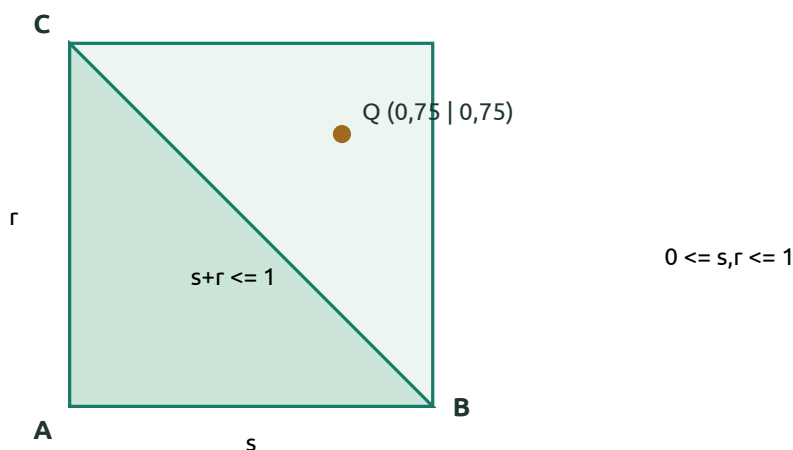


Схема в коэффициентах s, r : квадрат соответствует параллелограмму, нижний треугольник — ABC. Точка Q имеет $s+r=1.5$. Это схема коэффициентов, а не длин в координатах XYZ.

Проверка. Q удовлетворяет уравнению плоскости: $5/2+3/2-2\cdot 5/2=-1$. Это необходимая, но не достаточная проверка для ограниченных фигур.

Где легко ошибиться. Точка плоскости не обязана лежать внутри треугольника; для него нужны ограничения на оба коэффициента и их сумму.

Критерии (5 б.): 2 — Коэффициенты s, r ; 1 — Проверка третьей координаты; 1 — Параллелограмм; 1 — Треугольник и сумма коэффициентов.

Повторить: M06-L02 — Плоскость и ограниченные фигуры.

Aufgabe 6 • 16 Punkte

Untersuchen Sie $f(x)=(x-1)^2/x$.

6a • 5 Punkte

Bestimmen Sie die Definitionsmenge, die Nullstellen und alle senkrechten sowie schiefen Asymptoten.

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Числитель обращается в нуль при $x=1$; это допустимый двойной нуль.

Деление даёт $f(x) = x - 2 + 1/x$. При $x \rightarrow 0^-$ функция стремится к $-\infty$, при $x \rightarrow 0^+$ — к $+\infty$: вертикальная асимптота $x=0$.

При $x \rightarrow \pm\infty$ разность $f(x) - (x-2) = 1/x$ стремится к нулю. Наклонная асимптота $y = x - 2$.

Проверка. Нулевой знаменатель при $x=0$ не сокращается: числитель там равен 1.

Где легко ошибиться. Наклонная асимптота — уравнение прямой $y = x - 2$; добавочный член $1/x$ показывает, с какой стороны к ней подходит график.

Критерии (5 б.): 1 — Область определения; 1 — Двойной нуль; 1 — Вертикальная асимптота и пределы; 2 — Деление и наклонная асимптота.

Повторить: M02-L03 — Область, нули и асимптоты.

6b • 5 Punkte

Bestimmen Sie die Monotonieintervalle und alle lokalen Extrempunkte.

$f'(x) = 1 - 1/x^2 = (x^2 - 1)/x^2$. Производная положительна при $|x| > 1$ и отрицательна при $0 < |x| < 1$.

Функция возрастает на $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$, убывает на $(-1; 0)$ и $(0; 1)$. Интервалы через $x=0$ объединять нельзя.

При $x=-1$ знак меняется с + на -: максимум $H(-1|-4)$. При $x=1$ знак меняется с - на +: минимум $T(1|0)$.

Проверка. $f''(x) = 2/x^3$; $f''(-1) = -2 < 0$, $f''(1) = 2 > 0$ независимо подтверждают типы экстремумов.

Где легко ошибиться. Нельзя записать убывание на всём $(-1; 1)$: функция не определена в нуле.

Критерии (5 б.): 1 — Производная; 2 — Все промежутки с учётом разрыва; 2 — Координаты и типы двух экстремумов.

Повторить: M02-L03 — Монотонность и экстремумы.

6c • 3 Punkte

Hat der Graph einen Wendepunkt? Begründen Sie Ihre Antwort.

$f''(x) = 2/x^3$ не обращается в нуль на D : она отрицательна при $x < 0$ и положительна при $x > 0$.

Единственная граница смены знака — $x=0$, но эта точка не принадлежит области определения. Поэтому точек перегиба нет.

Проверка. На каждой связной ветви знак второй производной постоянен.

Где легко ошибиться. Смена знака по разные стороны вертикальной асимптоты не создаёт точку перегиба на графике.

Критерии (3 б.): 1 — Вторая производная и её знак; 1 — Исключён $x=0$; 1 — Обоснованное отсутствие перегиба.

Повторить: M02-L03 — Перегиб и область определения.

6d • 3 Punkte

Bestimmen Sie die Tangentengleichung an der Stelle $x=2$.

$$f(2)=1/2, f'(2)=3/4.$$

$$\text{Касательная } y=1/2+(3/4)(x-2)=(3/4)x-1.$$

Проверка. При $x=2$ прямая имеет высоту $1/2$ и наклон $3/4$.

Где легко ошибиться. Для касательной нужны и значение функции, и значение производной в одной и той же точке.

Критерии (3 б.): 1 — Точка; 1 — Наклон; 1 — Уравнение.

Повторить: M02-L01 — Касательная через точку и наклон.

Aufgabe 7 • 12 Punkte

Die Graphen $f(x)=2x$ und $g(x)=x^2$ begrenzen eine endliche Fläche. Diese Fläche rotiert um die x -Achse. Auf beiden Koordinatenachsen gilt $1 \text{ LE}=2 \text{ cm}$.

7a • 3 Punkte

Bestimmen Sie die Schnittpunkte und begründen Sie, welcher Graph dazwischen oben liegt.

$$2x=x^2 \text{ даёт } x(x-2)=0: x=0 \text{ и } x=2. \text{ Точки пересечения } (0|0), (2|4).$$

На $(0;2)$ разность $f-g=x(2-x)>0$, значит f выше g . Оба графика здесь неотрицательны.

$$\text{Проверка. При } x=1 \text{ получаем } f(1)=2>g(1)=1.$$

Где легко ошибиться. Для площади и объёма нельзя выбирать границы по отдельным нулям функций, если область ограничена их пересечениями.

Критерии (3 б.): 1 — Абсциссы пересечений; 1 — Координаты точек; 1 — Порядок графиков.

Повторить: M03-L01 — Границы между графиками.

7b • 3 Punkte

Berechnen Sie den Flächeninhalt in FE und in cm^2 .

$$A=\int_0^2(2x-x^2)dx=[x^2-x^3/3]_0^2=4-8/3=4/3 \text{ FE}.$$

$$\text{Одна FE равна } (2 \text{ cm})^2=4 \text{ cm}^2, \text{ поэтому } A=16/3 \text{ cm}^2 \approx 5,333 \text{ cm}^2.$$

Проверка. На всём промежутке подынтегральная разность неотрицательна, поэтому интеграл действительно равен геометрической площади.

Где легко ошибиться. Масштаб площади равен квадрату линейного масштаба.

Критерии (3 б.): 1 — Интеграл верхнего минус нижнего графика; 1 — $4/3$ FE; 1 — Перевод в cm^2 .

Повторить: M03-L01 — Площадь и квадрат масштаба.

7c • 6 Punkte

Berechnen Sie das Rotationsvolumen in VE und in cm^3 . Geben Sie den Außen- und Innenradius an.

Для $0 \leq x \leq 2$ внешний радиус $R=2x$, внутренний $r=x^2$. Сечение — кольцо площади $\pi(R^2-r^2)$.

$$V = \pi \int_0^2 (4x^2 - x^4) dx = \pi \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \pi \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right) = \frac{64\pi}{15} \text{ VE}.$$

Одна VE равна $(2 \text{ см})^3 = 8 \text{ см}^3$. Поэтому $V = \frac{64\pi}{15} \text{ см}^3 \approx 107,2 \text{ см}^3$.

Проверка. И $R \geq r \geq 0$, и разность квадратов неотрицательны на выбранном промежутке. Независимое численное интегрирование даёт тот же объём.

Где легко ошибиться. Площадь кольца — $\pi(R^2-r^2)$, а не $\pi(R-r)^2$. Масштаб объёма кубический.

Критерии (6 б.): 2 — Правильные радиусы и кольцевая модель; 2 — Интеграл и $\frac{64\pi}{15} \text{ VE}$; 2 — Куб масштаба и результат в см^3 .

Повторить: M03-L02 — Метод колец и куб масштаба.

Aufgabe 8 • 12 Punkte

Die beiden Teilaufgaben sind unabhängig voneinander.

8a • 4 Punkte

Lösen Sie $(a-1)x^2 - 2ax + (a+1) = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Geben Sie die Anzahl der verschiedenen reellen Lösungen an.

При $a=1$ уравнение становится линейным: $-2x+2=0$, единственное решение $x=1$.

Для $a \neq 1$ раскладываем: $(x-1)((a-1)x-(a+1))=0$. Поэтому $x=1$ или $x=(a+1)/(a-1)$.

Второй корень не равен 1: равенство $a+1=a-1$ невозможно. При любом $a \neq 1$ два различных действительных решения.

Проверка. Для $a=0$ получаем $-x^2+1=0$ с корнями ± 1 . Для $a=-1$ корни 0 и 1. Дискриминант настоящего квадратного уравнения равен 4.

Где легко ошибиться. Значение $a=1$ нужно выделить до деления на $a-1$ или применения квадратной формулы.

Критерии (4 б.): 1 — Отдельный линейный случай; 2 — Корни при $a \neq 1$; 1 — Различность и число корней.

Повторить: M01-L02 — Потеря степени при особом параметре.

8b · 8 Punkte

Zwei Seiten eines Rechtecks liegen auf den positiven Koordinatenachsen. Die gegenüberliegende Ecke liegt auf $y = -\ln(x/3)$ mit $0 < x < 3$. Bestimmen Sie die Seitenlängen und den größtmöglichen Flächeninhalt. Begründen Sie die globale Maximalität.

Ширина x , высота $-\ln(x/3) > 0$. Целевая функция $A(x) = -x \ln(x/3)$, $0 < x < 3$.

$A'(x) = -\ln(x/3) - 1$. Из $A' = 0$ получаем $\ln(x/3) = -1$, $x = 3/e$.

Высота равна $-\ln(1/e) = 1$. Поэтому стороны $3/e$ и 1 LE, максимальная площадь $3/e \approx 1,104$ FE.

$A''(x) = -1/x < 0$ на всём интервале; стационарная точка единственна. Кроме того, при $x \rightarrow 0+$ и $x \rightarrow 3-$ площадь стремится к 0. Значит, найденный внутренний максимум глобальный.

Проверка. В A' знак меняется с $+$ на $-$ при $3/e$; прямая подстановка даёт $A(3/e) = 3/e$.

Где легко ошибиться. Максимум высоты графика не является максимумом площади. Сначала нужно записать произведение сторон и допустимый интервал.

Критерии (8 б.): 2 — Модель площади и область; 2 — Производная и критическая точка; 2 — Стороны и площадь; 2 — Обоснование глобального максимума.

Повторить: M02-L02 — Модель оптимизации и границы.