

Восемь подробных разборов

Учебная редакция от 19 октября 2026 года

Сравнивай с разбором после собственной попытки. Условия, рисунки и объяснения идут в порядке задач.

8 задач · 100 баллов

1	Наклонная пирамида: высота, боковые грани и объём	9 баллов стр. 2
2	Треугольник, ближайшая точка и прямая Эйлера	14 баллов стр. 6
3	Цилиндр: ближайшая точка, прямая и плоскость	19 баллов стр. 11
4	Бактерии: удвоение и экспоненциальный рост	8 баллов стр. 18
5	Семейство функций: экстремум, эскиз и площадь	17 баллов стр. 22
6	Треугольник под графиком: наибольшая площадь	9 баллов стр. 28
7	Кубический полином: касательная и объём	12 баллов стр. 33
8	Проверки качества и распределения вероятностей	12 баллов стр. 38

Замечания к условиям задач 3 и 6 указаны на соответствующих страницах.

Начать можно с задачи 4, затем перейти к 5, 6 и 7. Для геометрии: 2, 3, 1. Задача 8 пригодится после биномиального распределения.

Наклонная пирамида

Учебный вариант · Подробное решение

Gegeben ist die schiefe dreiseitige Pyramide ABCD mit der Spitze D oberhalb der horizontalen Grundebene ABC. Es gilt: $AB = 8\text{ cm}$, $AC = 11\text{ cm}$, $\angle BAC = 50^\circ$, $AD = 9\text{ cm}$ und $\angle DAC = 90^\circ$. Die Kante AD bildet mit der Grundebene einen Winkel von 56° . H ist der Fußpunkt des Lotes von D auf die Grundebene. H und B liegen auf derselben Seite der Geraden AC. Fertigen Sie eine Skizze an. Berechnen Sie die Länge BC, den Winkel $\angle BDC$, den Flächeninhalt des Dreiecks ABC und das Volumen der Pyramide ABCD.

Дана наклонная треугольная пирамида ABCD. Вершина D находится над горизонтальной плоскостью основания ABC. Известно: $AB = 8\text{ cm}$, $AC = 11\text{ cm}$, $\angle BAC = 50^\circ$, $AD = 9\text{ cm}$ и $\angle DAC = 90^\circ$. Ребро AD образует с плоскостью основания угол 56° . H является основанием перпендикуляра из D на плоскость основания. Точки H и B лежат по одну сторону от прямой AC. Сделай эскиз. Найди длину BC, угол $\angle BDC$, площадь треугольника ABC и объём пирамиды ABCD.

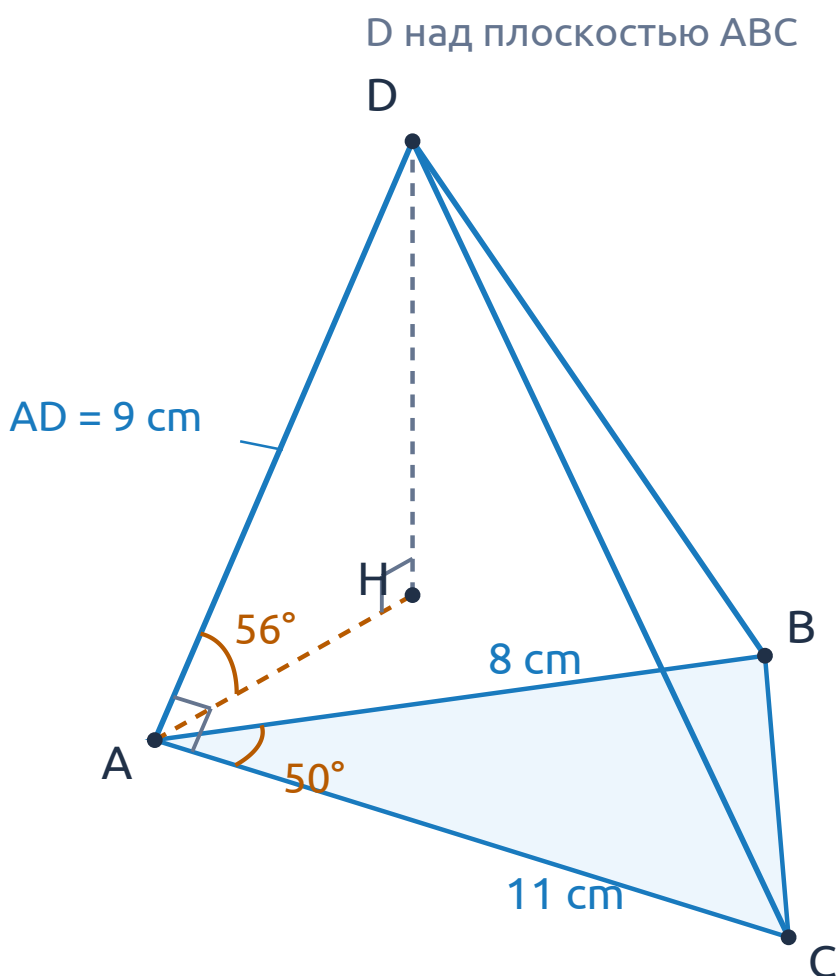
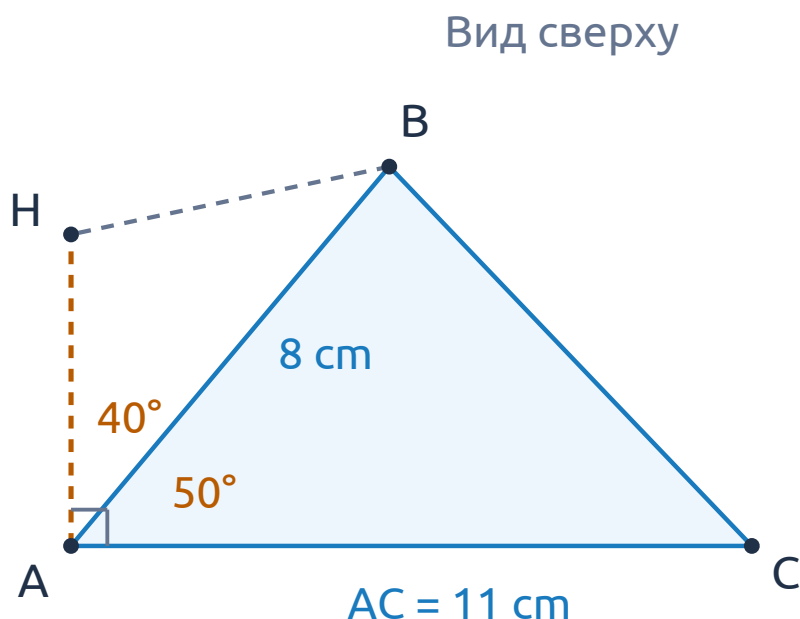


Схема к условию. Основание ABC выделено голубым; DH перпендикулярен плоскости основания. H и B лежат по одну сторону от AC. Пунктир AH показывает проекцию ребра AD. Пространственные углы показаны в перспективе.

1. Где расположены Н и высота пирамиды

Н лежит в плоскости основания, а DH перпендикулярен этой плоскости. Поэтому DH является высотой, АН является проекцией ребра AD, а угол между AD и основанием равен $\angle DAN = 56^\circ$.

Ребро AD перпендикулярно AC. Его горизонтальная проекция АН также перпендикулярна AC: проекция вертикального отрезка DH на AC равна нулю. По условию Н и В лежат по одну сторону от AC. Поэтому луч АВ находится между AC и АН и $\angle BAN = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$. Точка Н находится вне треугольника ABC.



Вид основания сверху с одинаковым масштабом по обеим осям. Н находится вне треугольника ABC. Из $АН \perp AC$ и $\angle BAC = 50^\circ$ получаем $\angle BAN = 40^\circ$.

2. Сторона BC по теореме косинусов

В основании известны две стороны и угол между ними. Теорема косинусов связывает их с третьей стороной BC. После вычисления квадрата длины берём положительный корень.

$$BC = \sqrt{8^2 + 11^2 - 2 \cdot 8 \cdot 11 \cdot \cos 50^\circ} = \sqrt{185 - 176 \cos 50^\circ} \approx 8,4776 \text{ см.}$$

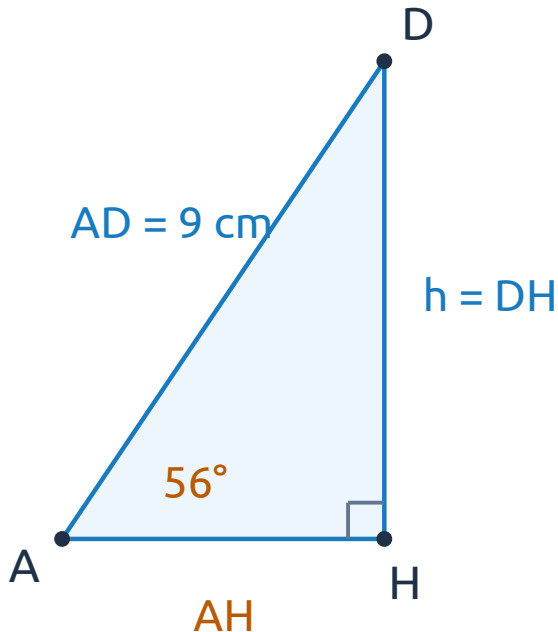
3. Площадь основания

Для площади используем те же две стороны и синус угла между ними. Например, при основании AC высота из В равна $AB \cdot \sin 50^\circ$.

$$F_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 11 \cdot \sin 50^\circ = 44 \sin 50^\circ \approx 33,7060 \text{ см}^2.$$

4. Высота DH и проекция AH

В прямоугольном треугольнике AHD гипотенуза AD равна 9 см. Высота DH противолежит углу 56° , а AH прилежит к нему. Поэтому используем соответственно синус и косинус. Промежуточные значения сохраняем в калькуляторе без округления.



Треугольник AHD показан в своём истинном масштабе. AD является гипотенузой, а DH является высотой пирамиды.

$$h = DH = 9 \sin 56^\circ \approx 7,4613 \text{ см}; AH = 9 \cos 56^\circ \approx 5,0327 \text{ см}.$$

5. Боковые рёбра DC и BD

В грани ACD угол при A прямой, поэтому по теореме Пифагора $DC^2 = AD^2 + AC^2 = 202$.

Для второго ребра сначала рассматриваем треугольник ABH в основании. Известны AB, AH и угол $\angle BAH = 40^\circ$, значит BH находим по теореме косинусов. Затем $DH \perp BH$, поэтому в треугольнике BHD получаем $BD^2 = BH^2 + DH^2$.

При сложении $AH^2 + DH^2$ заменяем на $AD^2 = 81$. В результате длина BD определяется теми же данными, что и высота.

$$DC = \sqrt{202} \approx 14,2127 \text{ см}. BH^2 = 8^2 + AH^2 - 16 \cdot AH \cdot \cos 40^\circ. BD^2 = 145 - 144 \cos 56^\circ \cos 40^\circ, \text{ поэтому } BD \approx 9,1277 \text{ см}.$$

6. Угол BDC в боковой грани

Теперь в треугольнике BCD известны все три стороны. Напротив искомого угла при D лежит BC. Теорема косинусов даёт $BC^2 = BD^2 + DC^2 - 2 \cdot BD \cdot DC \cdot \cos(\angle BDC)$. Выражаем косинус и применяем arccos в градусном режиме.

$$\cos(\angle BDC) = (BD^2 + DC^2 - BC^2) / (2 \cdot BD \cdot DC) \approx 0,8226589894; \angle BDC \approx 34,6481^\circ.$$

7. Объём пирамиды

Объём равен трети произведения площади основания на перпендикулярную высоту DH .
Положение H вне треугольника не меняет эту формулу.

$$V = \frac{1}{3} F_{ABC} \cdot DH = 132 \sin 50^\circ \sin 56^\circ \approx 83,8305 \text{ см}^3.$$

Ответ

$$BC \approx 8,4776 \text{ см}; \angle BDC \approx 34,6481^\circ; F_{ABC} \approx 33,7060 \text{ см}^2; V \approx 83,8305 \text{ см}^3.$$

Проверка. Для основания выполняется $3 < BC < 19$. Высота $DH \approx 7,4613$ см меньше ребра $AD = 9$ см. Стороны грани BCD удовлетворяют неравенствам треугольника. При подстановке неокруглённых BD , DC и угла BDC теорема косинусов возвращает то же BC .

Где легко ошибиться. Не подставляй AD вместо высоты DH . Угол 56° находится между AD и AH ; угол 90° из условия находится между AD и AC . Положение H задаёт угол $BAH = 40^\circ$. В грани BCD напротив угла при D лежит BC . Сохраняй неокруглённые значения до последнего шага.

Проверь себя

Почему высота пирамиды равна DH , хотя длина AD уже известна?

Высота перпендикулярна плоскости основания. AD наклонено к этой плоскости, а $DH \perp ABC$. В треугольнике AHD отрезок AD является гипотенузой.

Как положение H помогает найти угол BAH ?

$AH \perp AC$. Точки H и B лежат по одну сторону от AC , поэтому угол BAH равен $90^\circ - BAC = 40^\circ$.

Какая сторона находится напротив угла BDC и какую формулу нужно выбрать?

Напротив угла при D находится BC . Когда найдены BC , BD и DC , подходит теорема косинусов:
 $\cos(\angle BDC) = (BD^2 + DC^2 - BC^2) / (2 \cdot BD \cdot DC)$.

Треугольник, ближайшая точка прямой и прямая Эйлера

Die Eckpunkte eines Dreiecks sind $A(2|1)$, $B(10|5)$ und $C(6|13)$. Die Gerade g geht durch die Punkte $P(0|3)$ und $Q(12|9)$. a) Untersuchen Sie rechnerisch, ob das Dreieck rechtwinklig ist. Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks. b) Berechnen Sie die kürzeste Entfernung vom Punkt $D(8|2)$ zur Geraden g und bestimmen Sie die Koordinaten des Lotfußpunktes L von D auf die Gerade g . c) Bestimmen Sie die Geradengleichung der Eulerschen Geraden des Dreiecks.

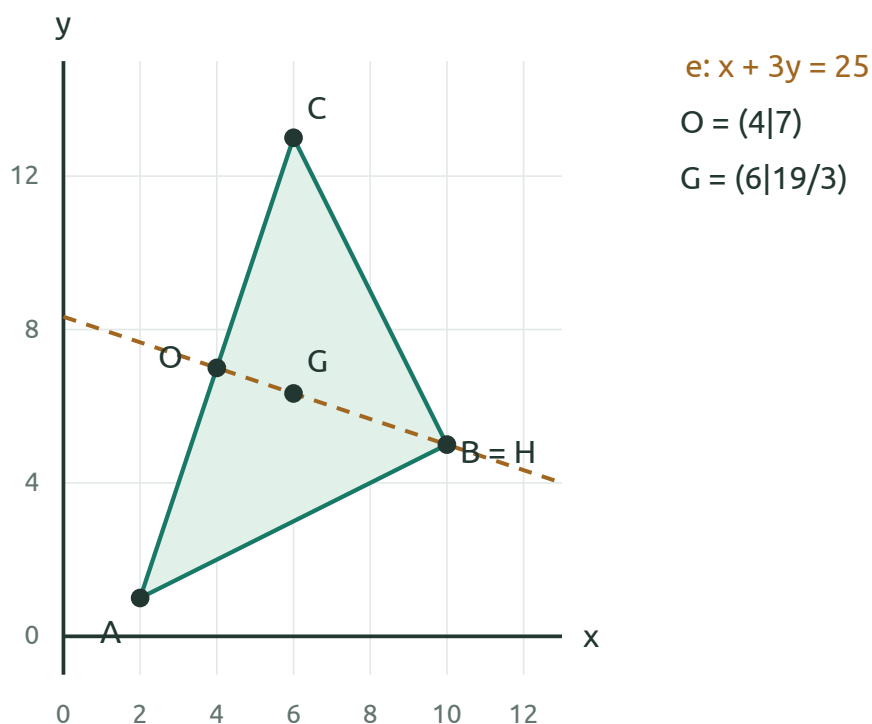
Вершины треугольника: $A(2|1)$, $B(10|5)$, $C(6|13)$. Прямая g проходит через $P(0|3)$ и $Q(12|9)$. а) Проверь вычислением, является ли треугольник прямоугольным. Найди его площадь. б) Найди кратчайшее расстояние от $D(8|2)$ до g и координаты основания перпендикуляра L . с) Найди уравнение прямой Эйлера треугольника ABC .

В одной задаче нужно исследовать треугольник, найти расстояние до прямой и построить прямую Эйлера.

Пункт а

Untersuchen Sie rechnerisch, ob das Dreieck rechtwinklig ist. Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks.

Проверь вычислением, является ли треугольник прямоугольным. Найди его площадь.



Прямой угол находится в B . Точка O находится посередине гипотенузы AC , $H=B$, а G обозначает центр тяжести. Точки O , G и H лежат на прямой Эйлера. Масштаб осей одинаков.

Проверка угла при В

Вектор от одной точки к другой показывает изменение координат. Чтобы получить $\overrightarrow{BA}$, вычитаем координаты В из координат А. Скалярное произведение двух векторов на плоскости находим так: перемножаем первые координаты, затем вторые и складываем результаты.

Разности координат дают $\overrightarrow{BA} = A - B = (-8|-4)$ и $\overrightarrow{BC} = C - B = (-4|8)$. Оба вектора ненулевые. Их скалярное произведение равно нулю, поэтому угол ABC прямой.

Здесь важно, в какой точке расположен угол. Векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$ выходят именно из В, так что проверка относится к этой вершине.

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-8)(-4) + (-4) \cdot 8 = 32 - 32 = 0; \angle ABC = 90^\circ.$$

Площадь по двум катетам

Обе стороны у прямого угла имеют длину $\sqrt{80} = 4\sqrt{5}$. Их можно сразу использовать как основание и перпендикулярную высоту.

$$|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{80}. F = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{80} \cdot \sqrt{80} = 40 \text{ кв. ед.}$$

Проверка, не зависящая от выбора высоты

От А получаются $\overrightarrow{AB} = (8|4)$ и $\overrightarrow{AC} = (4|12)$. Модуль их определителя равен площади параллелограмма, а треугольник занимает его половину. Получается то же число.

Кроме того, $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 = 80 + 80 = 160 = |\overrightarrow{AC}|^2$. Это отдельная проверка прямого угла по теореме Пифагора.

$$F = \frac{1}{2} |8 \cdot 12 - 4 \cdot 4| = 40 \text{ кв. ед.}; 80 + 80 = 160.$$

Ответ. Треугольник прямоугольный в В; его площадь равна 40 кв. ед.

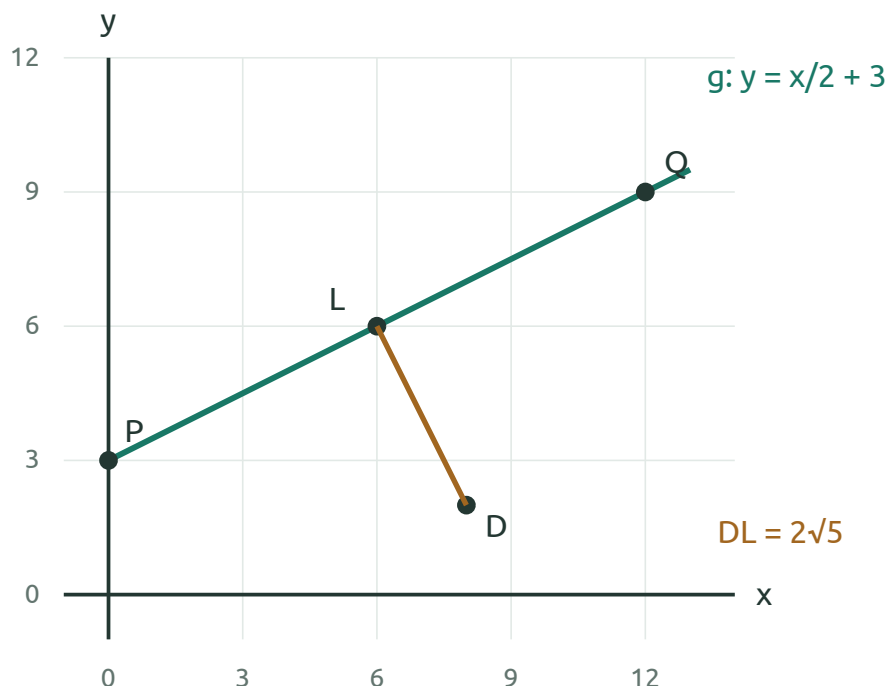
Проверка. Скалярное произведение $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, равенство Пифагора $80 + 80 = 160$ и площадь через определитель согласованы.

Где легко ошибиться. Для проверки конкретного угла бери два вектора с общей начальной вершиной. В формуле площади по двум произвольным сторонам требуется синус включённого угла; здесь он равен 1 только после доказательства прямого угла.

Пункт b

Berechnen Sie die kürzeste Entfernung vom Punkt $D(8|2)$ zur Geraden g und bestimmen Sie die Koordinaten des Lotfußpunktes L von D auf die Gerade g .

Найди кратчайшее расстояние от $D(8|2)$ до g и координаты основания перпендикуляра L .



Кратчайший отрезок от D до g перпендикулярен прямой g. Его основание $L=(6|6)$ лежит на g и на перпендикуляре через D. Масштаб осей одинаков.

Уравнение прямой по двум точкам

Прямую можно задать точкой и направлением. При движении от P к Q координаты меняются на 12 и 6. Делим оба числа на 6 и получаем направление $v=(2|1)$: два шага вправо и один вверх. В записи $X=P+tv$ число t определяет, сколько таких шагов сделать от P.

Нормалью называют вектор, перпендикулярный прямой. Подходит $n=(1|-2)$, потому что $1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 = 0$. Поэтому уравнение имеет вид $x-2y+c=0$. Подставляем $P(0|3)$: $-6+c=0$, значит $c=6$.

$g: X=(0|3)+t(2|1), t \in \mathbb{R}; g: x-2y+6=0$.

Точка L одновременно лежит на g и задаёт перпендикуляр

Точка прямой имеет координаты $L=(2t|3+t)$. Чтобы DL был перпендикулярен g, его скалярное произведение с направлением $(2|1)$ должно равняться нулю.

Из $D-L=(8-2t|-1-t)$ получаем $2(8-2t)+(-1-t)=0$. Это одно линейное уравнение $15-5t=0$, поэтому $t=3$ и $L=(6|6)$.

$(D-L) \cdot (2|1) = 15-5t=0 \Rightarrow t=3 \Rightarrow L=(6|6)$.

Длина перпендикуляра и смысл минимальности

Вектор $DL=L-D=(-2|4)$ имеет длину $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$. Любая другая точка X на g отличается от L в направлении $(2|1)$, перпендикулярном DL. По теореме Пифагора $DX^2=DL^2+LX^2$, поэтому более короткого отрезка до прямой нет.

Для числовой проверки можно независимо подставить D в формулу расстояния до прямой $x-2y+6=0$. Она даёт $|8-4+6|/\sqrt{5}=10/\sqrt{5}=2\sqrt{5}$.

$$d(D,g)=|DL|=\sqrt{((6-8)^2+(6-2)^2)}=2\sqrt{5}\approx 4,4721 \text{ ед. длины.}$$

Ответ. $L=(6|6)$; $d(D,g)=2\sqrt{5}\approx 4,4721$ ед. длины.

Проверка. L удовлетворяет уравнению g: $6-2\cdot 6+6=0$. Вектор DL перпендикулярен направлению g: $(-2|4)\cdot(2|1)=0$. Расстояние по формуле нормальной формы совпадает с длиной DL.

Где легко ошибиться. В формуле расстояния модуль значения $x-2y+6$ после подстановки D делят на длину нормали $\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$. Деление на 5 вместо $\sqrt{5}$ даст другое число. Координаты L нужно найти отдельно.

Пункт с

Bestimmen Sie die Geradengleichung der Eulerschen Geraden des Dreiecks.

Найди уравнение прямой Эйлера треугольника ABC.

Два центра из уже доказанного прямого угла

Прямая Эйлера проходит через три центра треугольника: ортоцентр H, центр описанной окружности O и центр тяжести G. Ортоцентр находится на пересечении высот. Для уравнения прямой достаточно найти две из этих точек; третьей проверим результат.

Две высоты прямоугольного треугольника совпадают с его катетами и пересекаются в вершине прямого угла. Поэтому $H=B=(10|5)$.

Центр описанной окружности лежит в середине гипотенузы AC: $O=((2+6)/2|(1+13)/2)=(4|7)$. Проверим это свойство на данных: $OA^2=OB^2=OC^2=40$. Значит все три вершины действительно лежат на окружности с этим центром.

$$H=(10|5), O=(4|7), R^2=40.$$

Прямая через O и H

Вектор $OH=(6|-2)$ можно сократить до $(3|-1)$. Он задаёт направление прямой Эйлера. В качестве нормали подходит $(1|3)$; подстановка точки O определяет правую часть уравнения.

$$e: X=(4|7)+t(3|-1), t\in\mathbb{R}. \text{ Нормальная форма: } x+3y=25.$$

Третья точка проверяет построение

Центр тяжести равен среднему арифметическому координат вершин: $G=(6|19/3)$. Он удовлетворяет найденному уравнению, поскольку $6+3\cdot 19/3=25$.

При параметре $t=2/3$ получаем G, при $t=2$ получаем H. Поэтому $OG:GH=1:2$. Та же связь записывается как $H=3G-2O$; подстановка даёт $(10|5)$.

$$G=(A+B+C)/3=(6|19/3); 6+3\cdot 19/3=25; H=3G-2O.$$

Ответ. Прямая Эйлера: $x+3y=25$, или $X=(4|7)+t(3|-1)$, $t \in \mathbb{R}$.

Проверка. $O=(4|7)$, $G=(6|19/3)$ и $H=(10|5)$ лежат на $x+3y=25$. Расстояния от O до A , B и C равны; $H=3G-2O$ выполняется.

Где легко ошибиться. Не подменяй центр тяжести G средним двух вершин: нужны все три. Середина AC здесь является центром окружности потому, что AC является гипотенузой прямоугольного треугольника. Для произвольного треугольника это правило не действует.

Проверь себя

Что именно доказывает равенство $BA \cdot BC=0$ в этой задаче?

Оба ненулевых вектора начинаются в B , поэтому оно доказывает прямой угол ABC при B .

Какие две независимые проверки нужны для точки L ?

L должна лежать на g , а вектор DL должен быть перпендикулярен направлению g . Здесь $6-2 \cdot 6+6=0$ и $(-2|4) \cdot (2|1)=0$.

Какие центры использованы для прямой Эйлера и где каждый из них находится?

Ортоцентр $H=(10|5)$ совпадает с вершиной прямого угла; центр окружности $O=(4|7)$ находится в середине гипотенузы; координаты центра тяжести $G=(6|19/3)$ равны средним координатам трёх вершин. Все они лежат на $x+3y=25$.

Повторить основу: [Векторы на плоскости, нормаль и проекция на прямую](#) · [Особые точки треугольника и прямая Эйлера](#)

Цилиндр: ближайшая точка, вертикальная плоскость и запасные данные

In einem Koordinatensystem ist ein gerader Zylinder mit dem Radius 5 und der Höhe 10 gegeben, dessen Grundfläche in der x - y -Ebene liegt. $M(8|5|10)$ ist der Mittelpunkt der Deckfläche des Zylinders. a) Weisen Sie nach, dass der Punkt $P(5|1|0)$ auf dem Rand der Grundfläche des Zylinders liegt. b) Unter allen Punkten auf dem Rand der Deckfläche hat der Punkt S den kleinsten Abstand von P , der Punkt T den größten. Geben Sie die Koordinaten von S und T an. c) Die Gerade g geht durch die Punkte M und S . [Ersatzangabe: $S(11|9|10)$] Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden g . Stellen Sie die Gleichung der Ebene e in Normalform auf, die die Gerade g enthält und senkrecht zur x - y -Ebene liegt. [Kontrollangabe: $e: 4x-3y=17$] d) Geben Sie die Gleichung der Geraden h an, die eine Mittelsenkrechte zur Strecke SM ist und die senkrecht zur Ebene e verläuft. e) Gegeben ist $A(14,5|-3|10)$. Das Dreieck MSA bildet die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze im Punkt P . Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide.

В системе координат задан прямой цилиндр радиуса 5 и высоты 10. Его нижнее основание лежит в плоскости x - y . Точка $M(8|5|10)$ является центром верхнего основания. а) Докажи, что $P(5|1|0)$ лежит на границе нижнего основания цилиндра. б) Среди точек границы верхнего основания S имеет наименьшее расстояние до P , а T имеет наибольшее. Найди их координаты. в) Прямая g проходит через M и S . Напечатаны запасные данные $S(11|9|10)$. Найди g и нормальную форму плоскости e , содержащей g и перпендикулярной плоскости x - y . Контрольное уравнение: $4x-3y=17$. д) Найди прямую h , проходящую через середину SM , перпендикулярную SM и одновременно перпендикулярную плоскости e . е) Дана $A(14,5|-3|10)$. Треугольник MSA служит основанием пирамиды с вершиной P . Найди объём.

Нужно найти точки на цилиндре, составить уравнения прямых и плоскости, затем вычислить объём пирамиды.

Замечание к источнику. Запасная точка $S(11|9|10)$ отличается от ближайшей точки, которую требуется найти в б.

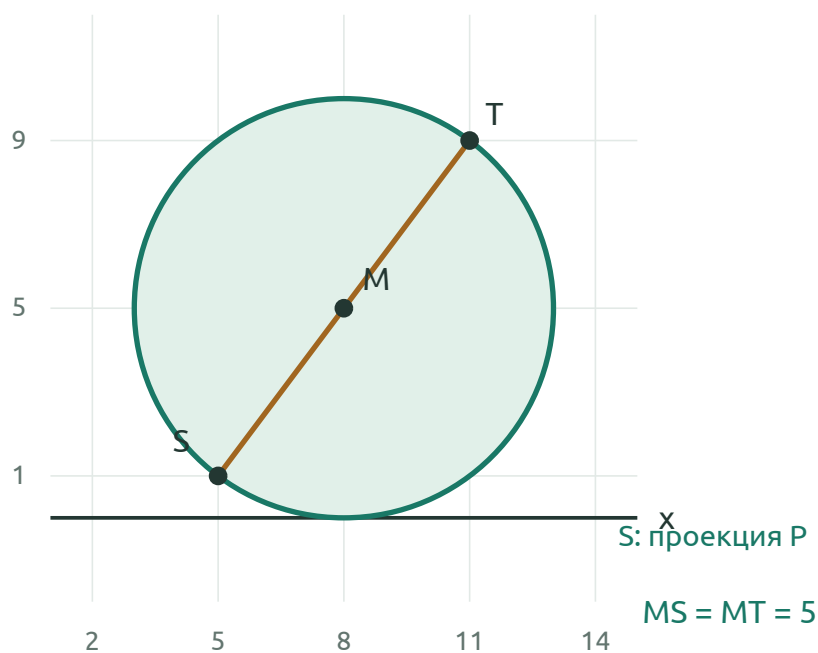
Ersatzangabe означает запасные данные для продолжения решения. Эта точка совпадает с дальней T и не заменяет ответ на б. Далее ближайшая точка обозначена S , запасная S_E . В с обе дают одну прямую и плоскость, в д получаются разные прямые, в е объёмы совпадают.

Пункт а

Weisen Sie nach, dass der Punkt $P(5|1|0)$ auf dem Rand der Grundfläche des Zylinders liegt.

Докажи, что $P(5|1|0)$ лежит на границе нижнего основания цилиндра.

х-у-проекция верхнего основания



Вид сверху: проекция P совпадает с ближайшей точкой верхней окружности S. На рисунке показаны только x и y; у M, S, T координата $z=10$.

Нижний центр под верхним

Ось прямого цилиндра перпендикулярна основаниям. Верхнее основание лежит в $z=10$, нижнее лежит в $z=0$. Поэтому нижний центр $N=(8|5|0)$.

У точки P уже выполнено $z=0$. Остаётся проверить, лежит ли она именно на окружности радиуса 5, а не просто где-то в плоскости основания.

$$N=(8|5|0), NP=(-3|-4|0).$$

Равенство радиусу

Квадрат расстояния NP равен $9+16=25$, значит расстояние равно 5. Вместе с координатой $z=0$ это доказывает принадлежность границе нижнего основания.

$$(5-8)^2+(1-5)^2=25=5^2; \text{ P находится на нижней окружности.}$$

Ответ. P лежит на нижней окружности: $z_P=0$ и $|NP|=5$.

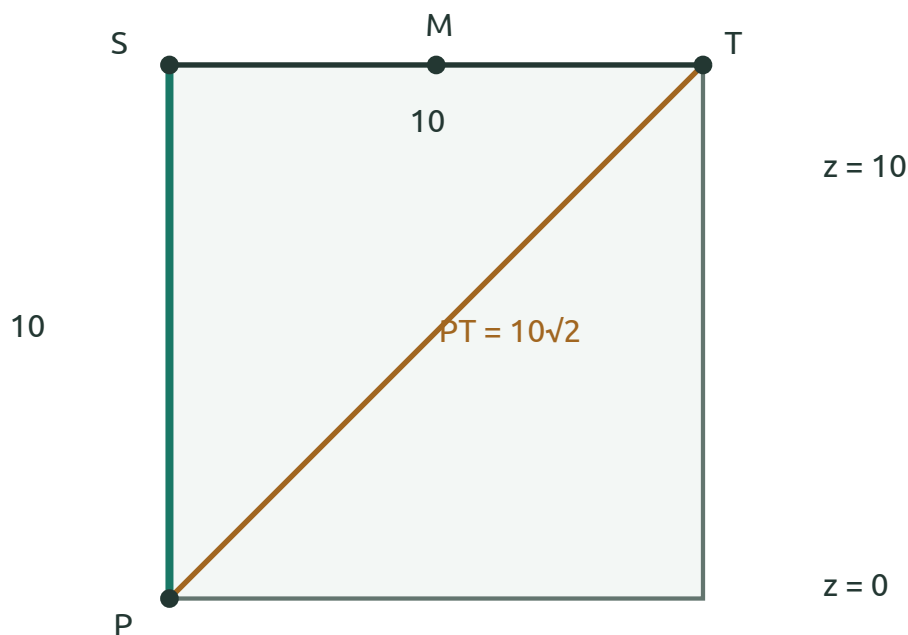
Проверка. P удовлетворяет системе $z=0, (x-8)^2+(y-5)^2=25$. Проверяется равенство радиусу, требуемое для Rand.

Где легко ошибиться. Одной координаты $z=0$ недостаточно. Неравенство $|NP|\leq 5$ описывает весь диск; граница требует $|NP|=5$.

Пункт b

Unter allen Punkten auf dem Rand der Deckfläche hat der Punkt S den kleinsten Abstand von P, der Punkt T den größten. Geben Sie die Koordinaten von S und T an.

Среди точек границы верхнего основания S имеет наименьшее расстояние до P, а T имеет наибольшее. Найди их координаты.



Вертикальное сечение через диаметр ST. От P до S нужно подняться на 10; до T добавляется горизонтальный путь длины 10. Поэтому $PS=10$, $PT=10\sqrt{2}$.

Постоянная вертикальная составляющая

Для любой точки $X=(x|y|10)$ на верхней окружности квадрат расстояния до P равен $(x-5)^2+(y-1)^2+100$. Последнее слагаемое у всех точек одинаково.

Горизонтальная часть обращается в ноль при $x=5$, $y=1$. Эта точка входит в верхнюю окружность, потому что её горизонтальное расстояние до M равно 5. Следовательно, $S=(5|1|10)$, а минимальное расстояние равно 10.

$$|PX|^2=(x-5)^2+(y-1)^2+100\geq 100. \text{ Равенство при } S=(5|1|10); |PS|=10.$$

Наибольшее горизонтальное расстояние: диаметр

В горизонтальной проекции и P, и проекция X лежат на одной окружности радиуса 5. Расстояние между ними не больше суммы расстояний до центра: $5+5=10$. Равенство достигается на противоположных концах диаметра.

Вектор от нижнего центра N к P равен $(-3|-4|0)$. Для противоположной верхней точки берём обратное горизонтальное направление $(3|4|0)$ от M. Получаем $T=(11|9|10)$.

$$T=M+(3|4|0)=(11|9|10); |PT|=\sqrt{(6^2+8^2+10^2)}=10\sqrt{2}.$$

Сравнение с напечатанной Ersatzangabe

В следующем пункте на фото напечатано «Ersatzangabe: $S(11|9|10)$ ». Эта точка совпадает с найденной T и не является минимумом из b . Чтобы не смешивать результаты, далее обозначим её S_E .

Запасные данные можно использовать как отдельную ветвь для продолжения c , d и e . Они не изменяют правильный ответ на b : ближайшей остаётся $S=(5|1|10)$.

Ответ. $S=(5|1|10)$, $|PS|=10$; $T=(11|9|10)$, $|PT|=10\sqrt{2}$. Напечатанная запасная $S_E=(11|9|10)$ совпадает с T .

Проверка. Обе точки имеют $z=10$ и квадрат горизонтального расстояния до M , равный 25. Их середина совпадает с M . Квадраты расстояний до P равны 100 и 200; геометрическое рассуждение доказывает глобальный минимум и максимум на всей окружности.

Где легко ошибиться. Не выбирай точку по одному виду её координат и не принимай Ersatzangabe за проверку результата b . Минимизируется расстояние до P , а не расстояние до центра M : последнее у всех точек окружности одинаково.

Пункт c

Die Gerade g geht durch die Punkte M und S . [Ersatzangabe: $S(11|9|10)$] Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden g . Stellen Sie die Gleichung der Ebene e in Normalform auf, die die Gerade g enthält und senkrecht zur x - y -Ebene liegt. [Kontrollangabe: $e: 4x-3y=17$]

Прямая g проходит через M и S . Напечатаны запасные данные $S(11|9|10)$. Найди g и нормальную форму плоскости e , содержащей g и перпендикулярной плоскости x - y . Контрольное уравнение: $4x-3y=17$.

Две точки S дают одну прямую

Для истинной ближайшей S направление $MS=(-3|-4|0)$, для запасной S_E направление равно $(3|4|0)$. Это противоположные ненулевые векторы, поэтому геометрическая прямая одинакова.

Выберем направление $(3|4|0)$. При $t=0$ получаем M , при $t=-1$ получаем S , при $t=1$ получаем S_E . Все точки прямой имеют $z=10$.

$$g: X=(8|5|10)+t(3|4|0), t \in \mathbb{R}.$$

Плоскость поднимается вертикально вдоль g

Плоскость e перпендикулярна горизонтальной плоскости x - y , поэтому она вертикальна. В ней лежат направление прямой $v=(3|4|0)$ и вертикальное направление $(0|0|1)$. Для уравнения нужен вектор, перпендикулярный обоим. Берём $n=(4|-3|0)$: $4 \cdot 3 - 3 \cdot 4 = 0$, а его третья координата равна нулю. Этот вектор называют нормалью плоскости.

Нормальная форма через M : $n \cdot (X-M)=0$. После раскрытия скобок получается именно напечатанное контрольное уравнение.

$$n=(4|-3|0); 4(x-8)-3(y-5)=0 \Rightarrow e: 4x-3y=17.$$

Что подтверждает контрольная формула

При подстановке $g: 4(8+3t) - 3(5+4t) = 17$ для любого t , значит вся прямая лежит в e . Нормаль e перпендикулярна нормали $(0|0|1)$ плоскости x - y , поэтому сами плоскости перпендикулярны.

Контрольная формула согласована с обеими ветвями S . Именно поэтому успешная проверка s не устраняет ошибку, если в b запасную точку назвали ближайшей.

Ответ. В обеих ветвях $g: X=(8|5|10)+t(3|4|0)$, $t \in \mathbb{R}$; $e: 4x-3y=17$.

Проверка. M , S и S_E удовлетворяют e ; подстановка параметрической прямой даёт постоянное 17. $n \cdot (3|4|0) = 0$ и $n \cdot (0|0|1) = 0$.

Где легко ошибиться. Плоскость $z=10$ содержит g , но параллельна плоскости x - y , поэтому не выполняет второе требование. Совпадение с Kontrollangabe проверяет часть s , но не правильность выбора ближайшей точки в b .

Пункт d

Geben Sie die Gleichung der Geraden h an, die eine Mittelsenkrechte zur Strecke SM ist und die senkrecht zur Ebene e verläuft.

Найди прямую h , проходящую через середину SM , перпендикулярную SM и одновременно перпендикулярную плоскости e .

Направление задаёт перпендикулярность плоскости

В пространстве через середину отрезка можно провести несколько прямых под прямым углом к нему. Здесь требуется также перпендикулярность всей плоскости e , поэтому направление прямой должно совпадать с нормалью $n=(4|-3|0)$.

Отрезок SM лежит в e , поэтому направление n автоматически перпендикулярно ему. Нужно провести такую прямую через правильную середину.

Основная ветвь: ближайшая S из b

При $S=(5|1|10)$ середина $K=(M+S)/2=(13/2|3|10)$. К этой точке прибавляем произвольное кратное нормали плоскости.

$$h: X=(13/2|3|10)+t(4|-3|0), t \in \mathbb{R}.$$

Запасная ветвь: напечатанная S_E

Если в s была явно выбрана Ersatzangabe $S_E=(11|9|10)$, продолжать нужно с её отрезком MS_E . Тогда $K_E=(19/2|7|10)$. Направление прежнее, но опорная точка другая, поэтому получается другая прямая.

$$h_E: X=(19/2|7|10)+t(4|-3|0), t \in \mathbb{R}.$$

Три свойства проверяются отдельно

В каждой ветви при $t=0$ прямая проходит через середину своего отрезка. Скалярное произведение $(4|-3|0) \cdot (3|4|0) = 0$ подтверждает перпендикулярность SM . Совпадение направления h с нормалью e подтверждает перпендикулярность плоскости.

Прямые h и h_E параллельны, но не совпадают: разность их опорных точек $K_E - K = (3|4|0)$ не параллельна их направлению $(4|-3|0)$.

Ответ. Для $S=(5|1|10)$: $h=(13/2|3|10)+t(4|-3|0)$. При использовании Ersatzangabe $S_E=(11|9|10)$: $h_E=(19/2|7|10)+t(4|-3|0)$.

Проверка. Для каждой ветви проверены принадлежность середины, нулевое скалярное произведение с MS и направление по нормали e . K и K_E лежат на g и v ; прямые h и h_E различны.

Где легко ошибиться. Не меняй ветвь незаметно: основная S и Ersatzangabe дают разные середины. Нормаль определяет только направление h , а координаты опорной точки нужно найти отдельно.

Пункт е

Gegeben ist $A(14,5|-3|10)$. Das Dreieck MSA bildet die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze im Punkt P . Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide.

Дана $A(14,5|-3|10)$. Треугольник MSA служит основанием пирамиды с вершиной P . Найди объём.

Плоскость основания сразу даёт высоту

Точки M , S и A лежат в $z=10$. Их неколлинеарность подтвердит ненулевое векторное произведение. Перпендикуляр из P к этой горизонтальной плоскости направлен вдоль оси z и имеет длину 10.

В основной ветви его основание совпадает с $S=(5|1|10)$. В запасной ветви расстояние от P до S_E равно $10\sqrt{2}$, но это наклонное ребро. Высота до плоскости основания всё равно равна 10.

$h = |z_P - 10| = |0 - 10| = 10$ ед. длины.

Площадь треугольника в основной ветви

Из M получаются $MS=(-3|-4|0)$ и $MA=(13/2|-8|0)$. Оба лежат в горизонтальной плоскости, поэтому у векторного произведения остаётся только z -компонента.

Модуль произведения равен площади параллелограмма на этих векторах. Для треугольника делим его пополам.

$MS \times MA = (0|0|50)$, поскольку $(-3)(-8) - (-4)(13/2) = 50$. $F_{MSA} = 50/2 = 25$ кв. ед.

Почему запасная ветвь сохраняет площадь

Для $S_E=(11|9|10)$ вектор $MS_E=(3|4|0)$ противоположен MS . Векторное произведение меняет знак и становится $(0|0|-50)$; его длина остаётся 50. Поэтому площадь другого треугольника MS_EA также равна 25.

Независимая проверка использует основание $|MS|=5$. В плоскости $z=10$ расстояние от A до прямой $4x-3y=17$ равно $|4 \cdot 14,5 - 3 \cdot (-3) - 17|/5 = 10$. Следовательно, площадь в обеих ветвях равна $5 \cdot 10/2 = 25$.

Объём и его единицы

Умножаем площадь основания на высоту и делим на три. Длины заданы в координатных единицах, поэтому объём записываем в кубических единицах.

Совпадение двух объёмов объясняется одинаковыми площадями оснований и одной плоскостью $z=10$. Оно не делает запасную точку ближайшей и не отменяет различия прямых из d .

$$V = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot 10 = 250/3 \approx 83,3333 \text{ куб. ед. в обеих ветвях.}$$

Ответ. $V=250/3 \approx 83,3333$ куб. ед. Обе явно разделённые ветви S дают этот объём, хотя треугольники основания различны.

Проверка. Площадь 25 подтверждается векторным произведением и формулой $\frac{1}{2} \cdot \text{основание} \cdot \text{высота}$. Расстояние от P до плоскости $z=10$ равно 10 независимо от положения S на верхней окружности.

Где легко ошибиться. Векторное произведение даёт площадь параллелограмма, поэтому для треугольника нужен множитель $1/2$. В формуле объёма затем нужен отдельный множитель $1/3$. Наклонный отрезок PS_E нельзя использовать вместо перпендикулярной высоты 10.

Проверь себя

Почему ближайшая верхняя точка находится прямо над P и почему это глобальный минимум?

У всех верхних точек разность z равна 10. Квадрат расстояния равен 100 плюс неотрицательный квадрат горизонтального расстояния. При $S=(5|1|10)$ горизонтальная часть равна нулю, поэтому меньше 10 получить нельзя.

Почему выбор основной S или Ersatzangabe не меняет g и e , но меняет h ?

M , S и S_E лежат на одной прямой, поэтому g и вертикальная плоскость через неё одинаковы. Середины MS и MS_E различны, а h должна проходить именно через соответствующую середину.

Почему объём при запасной S_E тоже равен $250/3$, хотя $|PS_E|=10\sqrt{2}$?

Высота измеряется до плоскости основания $z=10$ и равна 10. Замена MS на противоположный вектор MS_E меняет знак векторного произведения, но сохраняет площадь 25. Наклонное ребро PS_E в формулу высоты не входит.

Повторить основу: Векторы 3D: прямая, нормаль плоскости, расстояние и площадь · Середина отрезка и перпендикулярное направление

Бактерии: удвоение за 20 минут и рост за час

Manche Bakterien können sich unter optimalen Bedingungen etwa alle 20 Minuten verdoppeln. a) Stellen Sie für diese Bakterienart die natürliche Exponentialfunktion $N(t)$ für ein stündliches Wachstum auf und berechnen Sie, um wie viel Prozent die Anzahl solcher Bakterien pro Stunde zunimmt. b) Wie groß ist die Bakterienzahl nach 3 Stunden Wachstum, wenn zu Beginn der Messung 1 Million Bakterien vorhanden waren und berechnen Sie für diesen Fall, nach welcher Zeit 1 Milliarde Bakterien vorhanden sind.

Некоторые бактерии при оптимальных условиях могут удваивать свою численность примерно каждые 20 минут. а) Составьте для этих бактерий естественную экспоненциальную функцию $N(t)$, измеряя время в часах, и найдите относительный прирост численности за час. б) Найдите число бактерий через 3 часа, если в начале наблюдения был 1 миллион бактерий. Через какое время в этой модели их станет 1 миллиард?

По времени удвоения нужно составить функцию роста, найти процент прироста, количество бактерий и время достижения заданного количества.

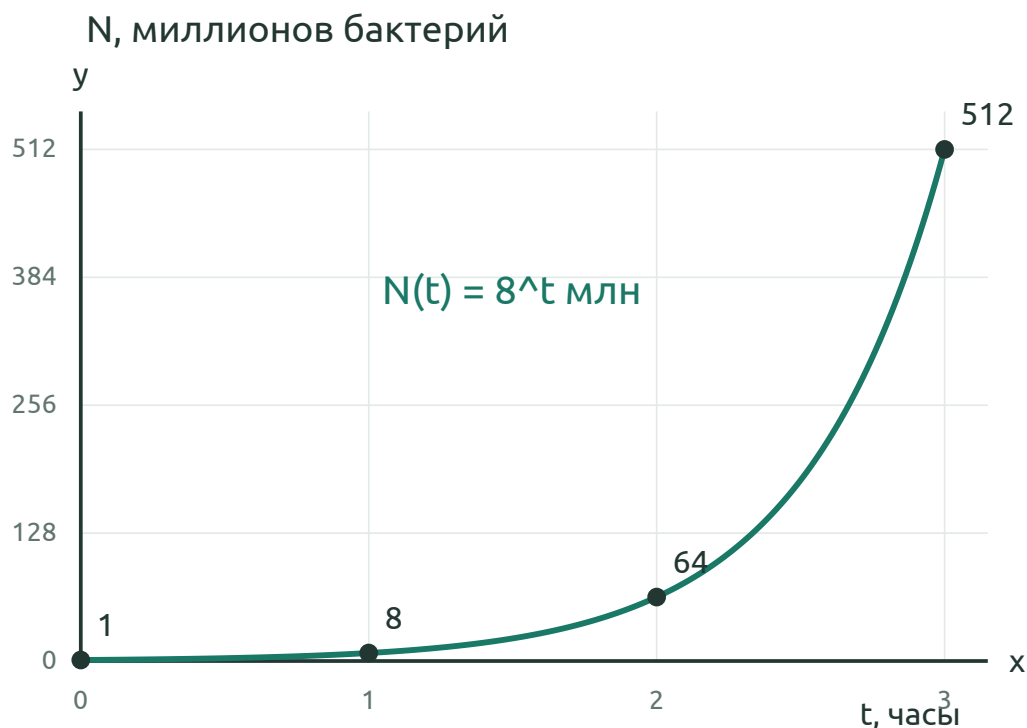
Замечание к источнику. Расчёт предполагает, что бактерии удваиваются каждые 20 минут в течение всего рассматриваемого времени.

Это экспоненциальная модель при указанных оптимальных условиях. Изменение питания или других условий в ней не учитывается.

Пункт а

Stellen Sie für diese Bakterienart die natürliche Exponentialfunktion $N(t)$ für ein stündliches Wachstum auf und berechnen Sie, um wie viel Prozent die Anzahl solcher Bakterien pro Stunde zunimmt.

Составьте для этих бактерий естественную экспоненциальную функцию $N(t)$, измеряя время в часах, и найдите относительный прирост численности за час.



За каждый час проходят три удвоения. На графике $N_0=1$ миллион, t измеряется в часах. Точки соответствуют 1, 8, 64 и 512 миллионам.

Записать смысл удвоения в выбранных единицах

Обозначим через t число часов от начала наблюдения, через $N_0=N(0)>0$ начальную численность. В части а она ещё не задана, поэтому оставляем N_0 в формуле.

За один час проходят три промежутка по 20 минут. При каждом удвоении умножаем число бактерий на 2, поэтому за час множитель равен $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Получаем $N(t) = N_0 \cdot 8^t$. Условие просит запись через e : $N(t) = N_0 e^{(kt)}$. Найдём k так, чтобы через треть часа осталось условие удвоения.

$$N(1/3) = 2N_0 \Rightarrow N_0 e^{(k/3)} = 2N_0 \Rightarrow e^{(k/3)} = 2.$$

Найти коэффициент и часовую модель

Чтобы освободить показатель степени, берём натуральный логарифм обеих положительных частей. Получаем $k/3 = \ln 2$, откуда $k = 3 \ln 2$. Коэффициент относится к часам и имеет единицу $ч^{-1}$.

Для проверки представим $e^{(3 \ln 2 \cdot t)}$ как $2^{(3t)}$. При $t=1$ показатель равен 3: за час действительно происходят три удвоения.

$$k = 3 \ln 2 \approx 2,0794 \text{ ч}^{-1}; N(t) = N_0 e^{((3 \ln 2)t)} = N_0 \cdot 8^t.$$

Перевести множитель в процент прироста

Через час будет $8N_0$ бактерий. Множитель 8 означает 800% прежнего количества: $800\% = 100\% + 700\%$. Поэтому количество увеличилось на 700%. Тот же результат даёт разность $8N_0 - N_0 = 7N_0$, делённая на N_0 .

Фраза «стало 800% от прежнего» также верна, но отвечает на другой вопрос. В условии спрашивают, на сколько процентов количество увеличилось.

$$(N(1)-N(0))/N(0) \cdot 100\% = (8-1) \cdot 100\% = 700\%.$$

Ответ. При t в часах $N(t) = N_0 e^{((3 \ln 2)t)} = N_0 \cdot 8^t$. Часовой множитель равен 8, относительный прирост равен 700%.

Проверка. $N(1/3) = 2N_0$, $N(2/3) = 4N_0$, $N(1) = 8N_0$. Начальное значение получается при $t=0$.

Где легко ошибиться. Формула $N_0 e^{((\ln 2)t)}$ удваивает количество за один час, а не за 20 минут. Коэффициент $k \approx 2,0794$ тоже нельзя непосредственно объявить приростом 207,94%: процент находят из $e^k - 1$.

Пункт b

Wie groß ist die Bakterienzahl nach 3 Stunden Wachstum, wenn zu Beginn der Messung 1 Million Bakterien vorhanden waren und berechnen Sie für diesen Fall, nach welcher Zeit 1 Milliarde Bakterien vorhanden sind.

Найдите число бактерий через 3 часа, если в начале наблюдения был 1 миллион бактерий. Через какое время в этой модели их станет 1 миллиард?

Подставить известное время

Теперь начальная численность задана: $N_0 = 10^6$. За три часа часовой множитель 8 применяется трижды. Можно проверить счёт иначе: три часа содержат девять двадцатиминутных периодов.

$$N(3) = 10^6 \cdot 8^3 = 10^6 \cdot 2^9 = 512\,000\,000.$$

Составить уравнение для неизвестного времени

Во второй части известна численность, поэтому вместо подстановки времени решаем уравнение. Деление на миллион показывает требуемый множитель роста: 1000.

Неизвестное t находится в показателе степени. Берём натуральный логарифм обеих частей: $\ln(8^t) = \ln 1000$. По правилу $\ln(a^t) = t \cdot \ln a$ получаем $t \cdot \ln 8 = \ln 1000$, затем делим на $\ln 8$. Время не обязано быть целым числом часов или удвоений.

$$10^6 \cdot 8^t = 10^9 \Rightarrow 8^t = 1000 \Rightarrow t = \ln 1000 / \ln 8 \approx 3,3219 \text{ часа.}$$

Перевести дробную часть часа и проверить масштаб

Полученное время равно примерно 3,3219 часа. Для перевода дробной части в минуты используем неокруглённое $t = \ln 1000 / \ln 8$: $(t-3) \cdot 60 \approx 19,3157$ минуты. Это примерно 3 часа 19 минут 19 секунд.

После девяти удвоений, то есть через 180 минут, бактерий 512 миллионов. После десяти, через 200 минут, их уже 1,024 миллиарда. Найденные 199,3157 минуты лежат между этими моментами. Округление до десяти удвоений дало бы лишь ближайший целый период, а не точное время достижения миллиарда.

$$t \approx 199,3157 \text{ мин} \approx 3 \text{ ч } 19 \text{ мин } 19 \text{ с.}$$

Ответ. Через 3 часа модель даёт 512 миллионов бактерий. 1 миллиард достигается через $\ln 1000 / \ln 8 \approx 3,3219$ часа, то есть примерно через 3 ч 19 мин 19 с.

Проверка. Подстановка $t = \ln 1000 / \ln 8$ возвращает $10^6 \cdot 1000 = 10^9$. При $t=3$ результат ещё меньше миллиарда, при $t=10/3$ часа уже больше.

Где легко ошибиться. Немецкое Milliarde означает 10^9 . Дробную часть часа переводят в минуты умножением на 60; перенос запятой этого действия не заменяет.

Проверь себя

Почему в часовой модели стоит 8^t , а не 2^t ?

Один час содержит три периода удвоения, поэтому часовой множитель равен $2^3=8$.

Если количество стало в 8 раз больше, каков прирост?

Добавилось 7 начальных количеств, то есть 700%.

Сколько удвоений прошло за 3 часа?

$180/20=9$; $2^9=512$.

Повторить основу: Рост и распад: фактор, единица времени и логарифм

Семейство $3xe^{(kx)}$: экстремум, эскиз и площадь

Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten $g_k: x \mapsto 3x \cdot e^{(kx)}$, mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Der Graph jeder Funktion g_k der Schar hat genau einen Extrempunkt E_k . a) Bestimmen Sie die Koordinaten von E_k . b) Der Graph einer Funktion $G(x)$ aus der Schar g_k besitzt den Hochpunkt $(4|12/e)$. Bestimmen Sie den Parameter k und stellen Sie die dazugehörige Funktionsgleichung auf. c) Berechnen Sie die Nullstelle x_N und die Extremstelle x_E der Funktion $g_{0,5}: x \mapsto 3x \cdot e^{(0,5x)}$ und erstellen Sie eine Skizze des Graphen für $x \in [-10; 1]$, mit $E_x = E_y = 1$ cm. d) Berechnen Sie den endlichen Flächeninhalt, den der Graph von $g_{0,5}$ mit der x -Achse in $[-2; 0]$ einschließt.

Рассматривается семейство определённых на $\mathbb{R}$ функций $g_k(x) = 3xe^{(kx)}$, где $k \neq 0$. График каждой функции семейства имеет ровно одну точку экстремума E_k . а) Найдите координаты точки экстремума E_k . б) График одной из функций семейства имеет точку максимума $(4|12/e)$. Найдите k и запишите эту функцию. в) Найдите нуль x_N и абсциссу экстремума x_E функции $g_{0,5}(x) = 3xe^{(0,5x)}$. Постройте эскиз графика при $x \in [-10; 1]$, используя одинаковый масштаб: одна единица по каждой оси соответствует 1 см. г) Найдите площадь конечной области между графиком $g_{0,5}$ и осью x на отрезке $[-2; 0]$.

Одна формула задаёт несколько функций в зависимости от параметра. Нужно найти экстремум, выбрать параметр, построить график и вычислить площадь.

Пункт а

Bestimmen Sie die Koordinaten von E_k .

Найдите координаты точки экстремума E_k .

Найти производную произведения

Во время вычисления производной по x параметр k считается постоянным числом. Функция состоит из двух множителей. Для произведения используем правило $(uv)' = u'v + uv'$: сначала берём производную первого множителя, затем второго и складываем два результата.

Производная первого множителя $3x$ равна 3. Производная второго множителя равна $ke^{(kx)}$: множитель k появляется из внутренней функции kx . Складываем два слагаемых по правилу произведения.

Общий множитель $3e^{(kx)}$ удобно вынести за скобки. Его знак известен при любом x , поэтому и нули, и знак производной будут определяться одной скобкой.

$$g'_k(x) = 3e^{(kx)} + 3xke^{(kx)} = 3e^{(kx)}(1 + kx).$$

Найти единственную стационарную точку

Поскольку $3e^{(kx)} > 0$, равенство $g'_k(x) = 0$ эквивалентно $1 + kx = 0$. Деление на k допустимо: случай $k = 0$ исключён условием. Получается одна абсцисса.

Найдено значение x , где производная равна нулю. Но точке на графике нужны две координаты. Подставляем $x = -1/k$ в исходную функцию g_k , чтобы получить y ; произведение kx при этом равно -1 .

$$x_E = -1/k; g_k(-1/k) = -3/(ke); E_k = (-1/k \mid -3/(ke)).$$

Убедиться, что это экстремум

Нулевая производная сама по себе ещё не доказывает экстремум. Здесь его тип можно определить второй производной: $g_k''(x) = 3ke^{(kx)}(2+kx)$. В найденной точке остаётся $3k/e$, и это число не равно нулю.

При $k > 0$ имеем минимум, при $k < 0$ получается максимум. Это также видно по знаку линейного множителя $1+kx$: он меняется при переходе через $-1/k$.

$$g_k''(-1/k) = 3k/e: \text{ Tiefpunkt при } k > 0, \text{ Hochpunkt при } k < 0.$$

Ответ. $E_k = (-1/k \mid -3/(ke))$. При $k > 0$ это минимум, при $k < 0$ получается максимум.

Проверка. Подстановка $x = -1/k$ даёт $1+kx = 0$. Вторая производная $3k/e$ не равна нулю, поэтому стационарная точка действительно является экстремумом.

Где легко ошибиться. Производная произведения не равна произведению производных. Запись $3ke^{(kx)}$ пропускает слагаемое, возникающее от неизменённого множителя $3x$.

Пункт b

Der Graph einer Funktion $G(x)$ aus der Schar g_k besitzt den Hochpunkt $(4 \mid 12/e)$. Bestimmen Sie den Parameter k und stellen Sie die dazugehörige Funktionsgleichung auf.

График одной из функций семейства имеет точку максимума $(4 \mid 12/e)$. Найдите k и запишите эту функцию.

Превратить координату экстремума в условие на k

В части а положение экстремума уже выражено через параметр. Поэтому нет необходимости заново решать всю задачу: заданная абсцисса 4 означает $-1/k = 4$.

$$-1/k = 4 \Rightarrow k = -1/4; G(x) = 3xe^{(-x/4)}.$$

Проверить оставшиеся данные

Одного совпадения абсциссы недостаточно: условие задаёт точку с двумя координатами и её тип. При $x = 4$ получаем $G(4) = 12e^{(-1)} = 12/e$. Параметр отрицателен, значит по части а это Hochpunkt.

Можно проверить тип непосредственно: G' меняется с плюса на минус при $x = 4$, поскольку положительная экспонента умножается на $1 - x/4$.

$$G(4) = 12/e; G'(x) = 3e^{(-x/4)}(1 - x/4).$$

Ответ. $k=-1/4$, $G(x)=3xe^{(-x/4)}$. Её максимум находится в точке $(4|12/e)$.

Проверка. $G'(4)=0$, $G(4)=12/e$, $G''(4)=-3/(4e)<0$.

Где легко ошибиться. Положительное k дало бы минимум. Знак параметра следует из условия Hochpunkt и служит быстрой проверкой ответа.

Пункт с

Berechnen Sie die Nullstelle x_N und die Extremstelle x_E der Funktion $g_{0,5}: x \mapsto 3x \cdot e^{(0,5x)}$ und erstellen Sie eine Skizze des Graphen für $x \in [-10; 1]$, mit $E_x = E_y = 1$ cm.

Найдите нуль x_N и абсциссу экстремума x_E функции $g_{0,5}(x)=3xe^{(0,5x)}$. Постройте эскиз графика при $x \in [-10; 1]$, используя одинаковый масштаб: одна единица по каждой оси соответствует 1 см.

$$g_{0,5}(x) = 3x \cdot e^{(0,5x)}$$

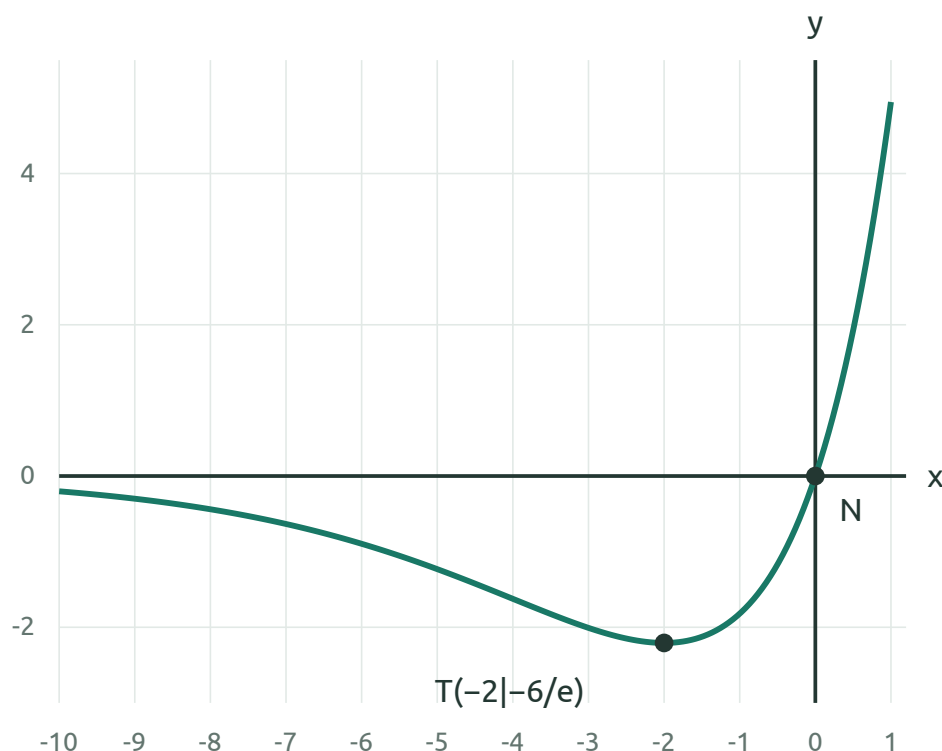


График $g_{0,5}(x)=3x \cdot e^{0,5x}$. $N=(0|0)$, $T=(-2|-6/e)$. По обеим осям один и тот же масштаб; в отдельном PDF для рисунка 1 единица равна 1 см при печати 100%.

Отметить нуль и минимум

Из $3xe^{(x/2)}=0$ следует $x=0$, поскольку $e^{(x/2)}>0$. При $k=1/2$ абсцисса экстремума равна -2 . Его ордината получается подстановкой в функцию: $-6/e \approx -2,2073$.

Параметр положителен, поэтому это минимум. Уже эти две точки задают основу эскиза: $T(-2|-6/e)$ и $N(0|0)$.

$$x_N=0; x_E=-2; T=(-2 \mid -6/e) \approx (-2 \mid -2,2073).$$

Выбрать направления движения графика

Производная равна $3e^{(x/2)}(1+x/2)$. На участке $x < -2$ скобка отрицательна, поэтому график убывает; при $x > -2$ она положительна, и график возрастает.

Знак самой функции определяется x . Вся часть при $x < 0$ находится ниже оси x , а при $x > 0$ находится выше. Поэтому левую ветвь нельзя провести над осью, даже если её значения близки к нулю.

$$g'_{0,5}(x) < 0 \text{ при } x < -2; g'_{0,5}(x) > 0 \text{ при } x > -2.$$

Уточнить форму на заданном отрезке

В левой границе $g(-10) = -30e^{(-5)} \approx -0,2021$, в правой $g(1) = 3e^{(1/2)} \approx 4,9462$. Эти значения помогут соблюсти масштаб и показать, какая часть графика входит в рисунок.

Для более точного изгиба можно использовать $g''(x) = (3/4)e^{(x/2)}(x+4)$. Знак меняется при $x = -4$, так что $W(-4 \mid -12/e^2) \approx (-4 \mid -1,6240)$ является точкой перегиба. Она полезна для эскиза, хотя отдельно в вопросе не требуется.

$$g(-10) \approx -0,2021; W \approx (-4 \mid -1,6240); g(1) \approx 4,9462.$$

Ответ. $x_N=0, x_E=-2$. На $[-10; -2]$ график убывает до $T(-2 \mid -6/e)$, затем возрастает, пересекает ось в $(0 \mid 0)$ и достигает примерно $(1 \mid 4,9462)$.

Проверка. $g'(-2)=0$ и $g''(-2)=3/(2e)>0$. Точка $(-10 \mid -0,2021)$ лежит выше минимума, а $(0 \mid 0)$ лежит на возрастающей ветви.

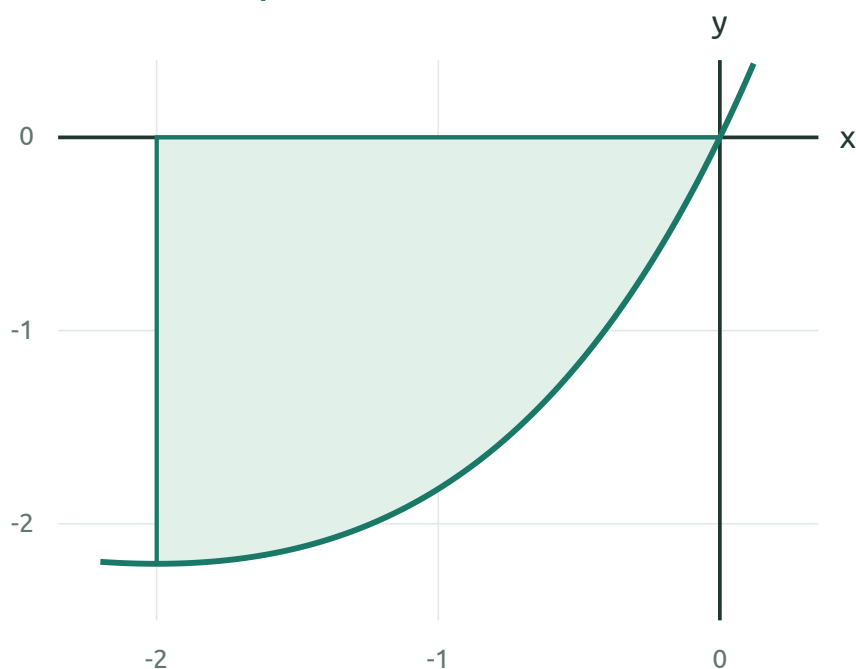
Где легко ошибиться. Не перепутайте Extremstelle, то есть абсциссу -2 , с Extrempunkt, то есть точкой $(-2 \mid -6/e)$. На эскизе одинаковый масштаб обеих осей указан в условии.

Пункт d

Berechnen Sie den endlichen Flächeninhalt, den der Graph von $g_{0,5}$ mit der x -Achse in $[-2; 0]$ einschließt.

Найдите площадь конечной области между графиком $g_{0,5}$ и осью x на отрезке $[-2; 0]$.

$$A = 12 - 24/e > 0$$



На $[-2; 0]$ график $g_{0,5}$ находится ниже оси x . Закрашенная геометрическая площадь положительна, а определённый интеграл отрицателен.

Определить знак перед интегралом

На всём внутреннем промежутке $x < 0$, а экспонента положительна. Значит, график расположен ниже оси x . Вертикальная высота области равна $0 - g_{0,5}(x)$, а не $g_{0,5}(x)$.

$$A = - \int_{-2}^0 3xe^{x/2} dx.$$

Найти первообразную произведения

Первообразная F должна удовлетворять равенству $F' = g$. Здесь помогает интегрирование по частям: $\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$. Выбираем $u = 3x$, чтобы после производной осталась постоянная 3. Для $v' = e^{x/2}$ получаем $v = 2e^{x/2}$, поскольку производная этой функции равна $e^{x/2}$.

Второй интеграл уже содержит только экспоненту. После его вычисления получаем одну первообразную, которую стоит сразу проверить производной.

$$\int 3xe^{x/2} dx = 6xe^{x/2} - 6 \int e^{x/2} dx = 6(x-2)e^{x/2} + C.$$

Подставить границы и вернуть положительную площадь

При $x=0$ первообразная равна -12 , при $x=-2$ она равна $-24/e$. Поэтому определённый интеграл равен $24/e - 12$ и действительно отрицателен.

Перед интегралом площади уже стоит минус. Применяем его ко всей разности значений, а не только к одному слагаемому.

$$A = -(-12 + 24/e) = 12 - 24/e \approx 3,1709 \text{ кв. ед.}$$

Ответ. $A = 12 - 24/e \approx 3,1709$ кв. ед.

Проверка. Площадь положительна и меньше площади прямоугольника ширины 2 и высоты $6/e$: $A < 12/e \approx 4,4146$. Производная $6(x-2)e^{(x/2)}$ возвращает $3xe^{(x/2)}$.

Где легко ошибиться. Отрицательный интеграл здесь не означает отрицательную площадь. Также при интегрировании $e^{(x/2)}$ нужен множитель 2, поскольку внутренняя производная равна $1/2$.

Проверь себя

Может ли $e^{(kx)}$ быть причиной нуля g_k ?

Нет, экспонента положительна. Единственный нуль функции задаёт $x=0$.

Как знак k определяет тип E_k ?

$g''_k(-1/k) = 3k/e$: при $k > 0$ минимум, при $k < 0$ максимум.

Почему на $[-2;0]$ площадь равна минусу интеграла?

На этом промежутке $g_{0,s} \leq 0$, поэтому высота области равна $0 - g_{0,s}$.

Повторить основу: [Параметр фиксирован при вычислении производной](#) · [Производные, экстремумы и исследование графика](#) · [Первообразные и геометрическая площадь](#)

Треугольник под $y=x \ln x$: знак высоты и наибольшая площадь

Gegeben ist die Funktion $f(x)=x \cdot \ln(x)$, mit $x>0$. Betrachtet werden die Dreiecke OPQ mit $O(0|0)$, $P(a|0)$ und $Q(a|f(a))$ und $0<a<1$. Ergänzung dieser Lernfassung: Die zweite Koordinate von P ist am rechten Fotorand abgeschnitten; hier wird $P(a|0)$ ausdrücklich angenommen. a) Begründen Sie rechnerisch, dass der Flächeninhalt jedes dieser Dreiecke mit dem Term $\frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \ln(a)$ bestimmt werden kann. (Der Term ist hier so wiedergegeben, wie er auf dem Foto gedruckt ist.) b) Unter den betrachteten Dreiecken hat eines den größten Flächeninhalt. Bestimmen Sie den zugehörigen Wert a.

Дана функция $f(x)=x \ln x$ при $x>0$. Рассматриваются треугольники OPQ, где $O(0|0)$, $Q(a|f(a))$ и $0<a<1$. Для этого учебного разбора принимаем $P(a|0)$; в фотографии вторая координата P обрезана правым краем. а) Обоснуйте вычислением формулу площади треугольника. В исходнике напечатан выражение $\frac{1}{2}a^2 \ln(a)$; проверьте его знак и явно укажите необходимое исправление для геометрической площади. б) Среди рассматриваемых треугольников найдите тот, у которого площадь наибольшая, и определите соответствующее значение a.

Точка на графике задаёт треугольник. Нужно выразить его площадь через a и найти, при каком a она наибольшая.

Замечание к исходнику. В напечатанной формуле площади $\frac{1}{2}a^2 \ln(a)$ не хватает минуса.

При $0<a<1$ логарифм отрицателен, а геометрическая площадь положительна. Для точек $O(0|0)$, $P(a|0)$, $Q(a|a \ln a)$ получается $A(a)=-\frac{1}{2}a^2 \ln(a)$. В условии сохранён напечатанный знак, а в решении объяснено исправление.

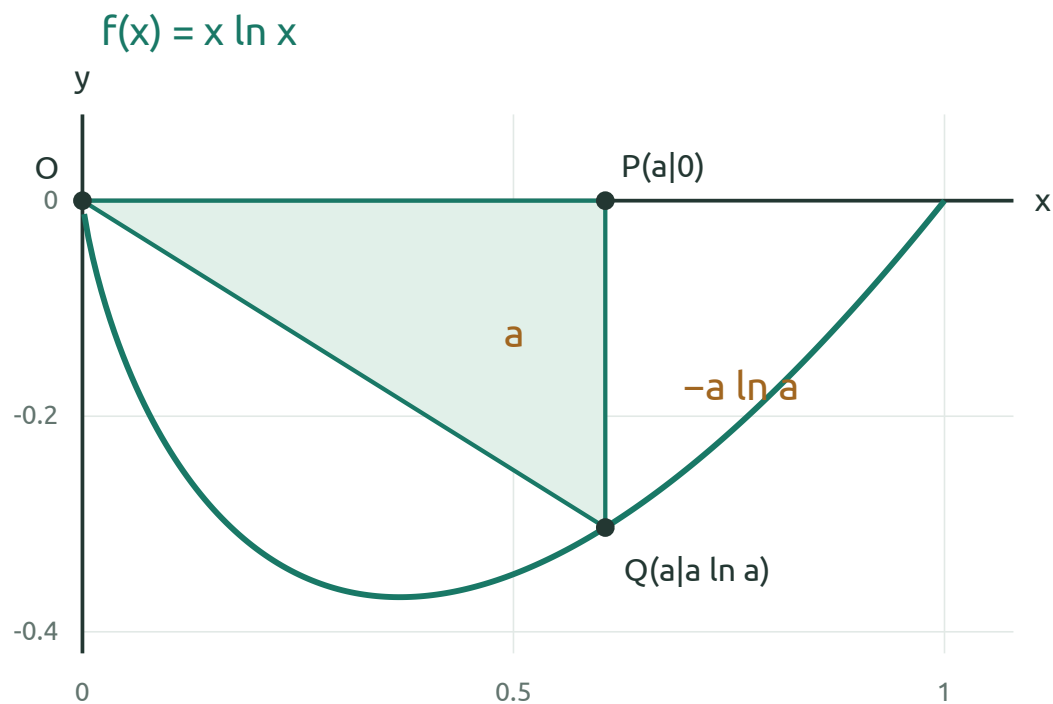
Замечание к исходнику. Вторая координата точки P обрезана на фотографии.

В разборе явно принимается $P(a|0)$: P лежит на оси x, а PQ вертикален. Все результаты о площади относятся к этой конфигурации. Полностью прочесть координату P по имеющейся фотографии нельзя.

Пункт а

Begründen Sie rechnerisch, dass der Flächeninhalt jedes dieser Dreiecke mit dem Term $\frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \ln(a)$ bestimmt werden kann. (Der Term ist hier so wiedergegeben, wie er auf dem Foto gedruckt ist.)

Обоснуйте вычислением формулу площади треугольника. В исходнике напечатан выражение $\frac{1}{2}a^2 \ln(a)$; проверьте его знак и явно укажите необходимое исправление для геометрической площади.



Учебная реконструкция обрезанной записи P: $P=(a|0)$, $Q=(a|a \ln a)$. Для $0 < a < 1$ точка Q лежит ниже оси x, высота треугольника равна $-a \ln a$.

Выбрать основание и положительную высоту

При принятом $P(a|0)$ точки O и P лежат на оси x, поэтому длина OP равна a. Точки P и Q имеют одинаковую координату $x=a$, поэтому PQ вертикален. Это прямоугольный треугольник, и его площадь равна половине произведения катетов.

При $0 < a < 1$ имеем $\ln(a) < 0$ и $f(a)=a \ln(a) < 0$. Точка Q ниже P; расстояние между ними равно $0 - a \ln(a)$, то есть $-a \ln(a) > 0$.

$$OP=a; PQ=|a \ln(a)|=-a \ln(a).$$

Получить формулу геометрической площади

Умножаем две положительные длины и делим на 2. Минус появляется из длины высоты; он не является произвольным исправлением конечного ответа.

Для проверки можно взять $a=1/2$. Тогда $\ln(1/2)=-\ln 2$: напечатанное выражение дал бы $-\ln 2/8$, а площадь треугольника равна положительному $\ln 2/8$.

$$A(a)=\frac{1}{2} \cdot a \cdot (-a \ln a)=-\frac{1}{2} a^2 \ln a; A(1/2)=\ln 2/8 > 0.$$

Отделить ошибку знака от решения задачи

На заданном промежутке выражение $+\frac{1}{2} a^2 \ln(a)$ отрицательно и потому не может быть геометрической площадью. В записи решения достаточно указать причину: высота равна модулю отрицательной ординаты.

Для поиска наибольшей площади дальше используем $A(a) = -\frac{1}{2}a^2 \ln(a)$. У напечатанного отрицательного выражения в найденной внутренней точке был бы минимум; максимума на открытом промежутке оно не достигает.

Ответ. Для учебной конфигурации $P(a|0)$ геометрическая площадь $A(a) = -\frac{1}{2}a^2 \ln(a) > 0$. В напечатанном выражении $\frac{1}{2}a^2 \ln(a)$ отсутствует необходимый минус.

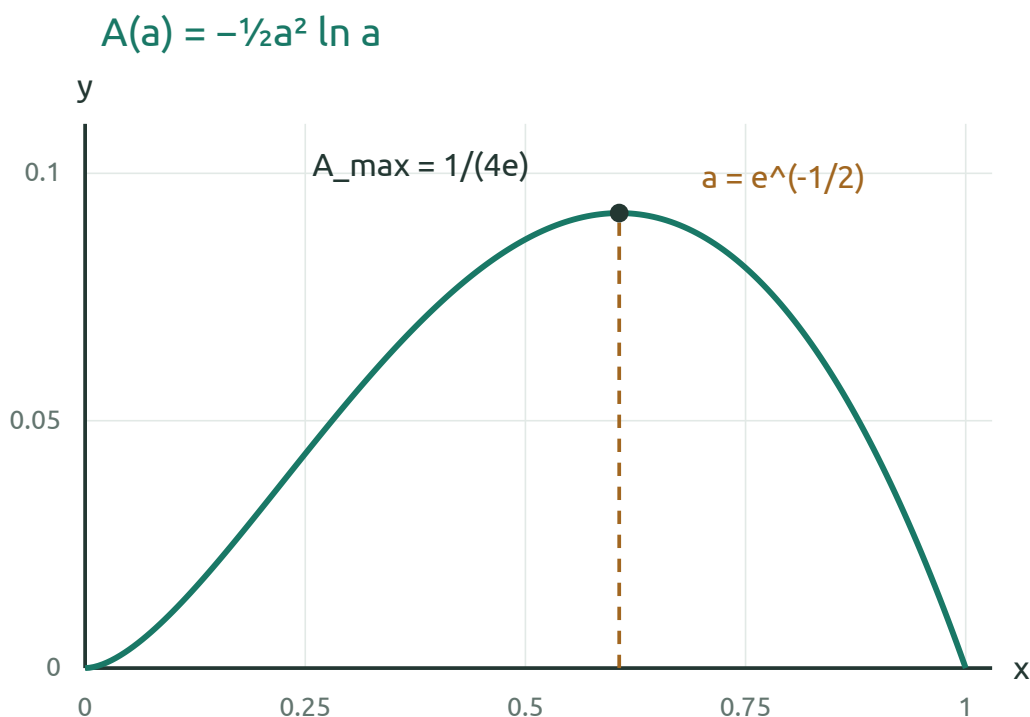
Проверка. При $a = 1/2$ основание равно $1/2$, высота равна $\ln 2/2$; половина их произведения равна $\ln 2/8$. Формула с минусом даёт то же положительное значение.

Где легко ошибиться. Ордината Q не равна длине PQ , когда Q ниже оси x . Использование $a \ln(a)$ как положительной высоты приводит к отрицательной «площади».

Пункт b

Unter den betrachteten Dreiecken hat eines den größten Flächeninhalt. Bestimmen Sie den zugehörigen Wert a .

Среди рассматриваемых треугольников найдите тот, у которого площадь наибольшая, и определите соответствующее значение a .



Площадь $A(a) = -\frac{1}{2}a^2 \ln a$ положительна внутри $(0;1)$. Максимум достигается при $a = e^{-1/2}$; на обоих концах площадь стремится к нулю.

Найти производную площади

Площадь записана как функция одного числа a . Чтобы найти возможный внутренний максимум, сначала вычислим её производную A' и решим $A'(a)=0$. Затем проверим, что площадь до найденного a растёт, а после него убывает.

Площадь зависит от одного параметра a , причём допустимы только значения $0 < a < 1$. В производной $a^2 \ln(a)$ участвуют оба множителя: производная квадрата равна $2a$, производная логарифма: $1/a$.

После упрощения выносим $-a$. На допустимом промежутке a положительно, поэтому уравнение для стационарной точки определяется скобкой.

$$A'(a) = -\frac{1}{2}(2a \ln a + a) = -a(\ln a + \frac{1}{2}).$$

Решить уравнение и проверить допустимость

Делим уравнение $A'(a)=0$ на ненулевое $-a$. Получаем $\ln(a) = -1/2$. Переход к экспоненте даёт единственный кандидат $a = e^{(-1/2)}$, и он действительно находится между 0 и 1.

$$\ln a = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = e^{(-1/2)} = 1/\sqrt{e} \approx 0,6065.$$

Доказать, что площадь наибольшая

Если $0 < a < e^{(-1/2)}$, то $\ln(a) + 1/2 < 0$ и $A'(a) > 0$. После $e^{(-1/2)}$ скобка положительна, поэтому $A'(a) < 0$. Значит, площадь сначала строго растёт, затем строго убывает; найденная точка даёт глобальный максимум на всём допустимом промежутке.

Проверка краёв согласуется с геометрией: при $a \rightarrow 1$ высота стремится к нулю, а при $a \rightarrow 0^+$ произведение $a^2 \ln(a)$ тоже стремится к нулю. Концы не являются допустимыми треугольниками задачи, но их предельные площади помогают проверить результат.

$$A' > 0 \text{ на } (0, e^{(-1/2)}); A' < 0 \text{ на } (e^{(-1/2)}, 1).$$

Восстановить размеры выбранного треугольника

В найденной точке $\ln(a^*) = -1/2$. Поэтому высота равна $-a^* \ln(a^*) = a^*/2$. Это позволяет вычислить максимальную площадь без повторного ввода логарифма в калькулятор.

В условии требуется значение a ; максимальная площадь и координата Q служат дополнительной проверкой и помогают правильно подписать рисунок.

$$PQ = 1/(2\sqrt{e}); A_{\max} = 1/(4e) \approx 0,0920 \text{ кв. ед.}; Q = (1/\sqrt{e} \mid -1/(2\sqrt{e})).$$

Ответ. Наибольшая геометрическая площадь достигается при $a = 1/\sqrt{e} \approx 0,6065$. Она равна $1/(4e) \approx 0,0920$ кв. ед.

Проверка. $A'(a^*) = 0$; $A''(a) = -\ln(a) - 3/2$, поэтому $A''(a^*) = -1 < 0$. Глобальность установлена сменой знака A' с плюса на минус на всём $(0; 1)$.

Где легко ошибиться. Корень $a=0$, формально видимый после вынесения a , недопустим: $\ln 0$ не существует и $0 < a < 1$. Одной отрицательной второй производной достаточно для локального максимума, но утверждение о наибольшей площади обосновано здесь знаком A' на всём промежутке.

Проверь себя

Почему длина PQ равна $-a \ln(a)$?

При $0 < a < 1$ ордината $a \ln(a)$ отрицательна, а расстояние от неё до оси равно её модулю.

Что произойдёт с напечатанным положительным выражением в точке $a=1/\sqrt{e}$?

У функции $+\frac{1}{2}a^2 \ln(a)$ там минимум $-1/(4e)$; геометрическая площадь имеет противоположный знак и максимум.

Как доказана глобальность максимума?

Производная исправленной площади положительна до $1/\sqrt{e}$ и отрицательна после него на всём $(0;1)$.

Повторить основу: Экстремальные задачи: составить целевую функцию и проверить максимум · Производная произведения и знак первой производной

Кубический полином: коэффициент, касательная и объём

Gegeben ist die reelle Funktion $f(x) = -(8/27)x^3 + bx^2$, mit $b \in \mathbb{R}$. a) Zusätzlich zu $x=9$ hat $f(x)$ eine weitere Nullstelle. Berechnen Sie diese und bestimmen Sie rechnerisch den Wert von b . [Kontrollangabe: $b=8/3$] b) Die Tangente an $f(x)$ im Punkt $P(3|16)$ wird mit t bezeichnet. Berechnen Sie die Gleichung der Tangente. c) Der Graph von f rotiert in $x \in [0;3]$ um die x -Achse. Berechnen Sie das dabei entstehende Volumen.

Дана функция $f(x) = -(8/27)x^3 + bx^2$ с действительным параметром b . а) Кроме $x=9$ функция имеет ещё один нуль. Найдите его и вычислите b . Контрольное значение в условии: $b=8/3$. б) Касательная к графику в точке $P(3|16)$ обозначена t . Найдите её уравнение. в) График f на отрезке $x \in [0;3]$ вращается вокруг оси x . Найдите объём получающегося тела вращения.

По известному нулю нужно найти коэффициент функции, затем построить касательную и вычислить объём вращения.

Замечание к исходнику. В пункте с спрашивается объём, хотя в условии говорится о вращении графика.

Объём относится к телу, полученному вращением области между графиком и осью x на отрезке $[0;3]$. Сам график при вращении даёт поверхность. Для расчёта ниже используется именно эта область.

Пункт а

Zusätzlich zu $x=9$ hat $f(x)$ eine weitere Nullstelle. Berechnen Sie diese und bestimmen Sie rechnerisch den Wert von b . [Kontrollangabe: $b=8/3$]

Кроме $x=9$ функция имеет ещё один нуль. Найдите его и вычислите b . Контрольное значение в условии: $b=8/3$.

Увидеть нуль, общий для всего семейства

Нуль функции означает такое значение x , при котором $f(x)=0$. Поэтому для поиска нулей приравниваем формулу к нулю и раскладываем выражение на множители.

У обоих слагаемых есть множитель x^2 . После его вынесения видно, что $x=0$ всегда обращает функцию в ноль. Это и есть дополнительный нуль, который ищется помимо 9.

$$f(x) = x^2(b - 8x/27); f(0) = 0.$$

Использовать заданный нуль $x=9$

Точка с абсциссой 9 принадлежит оси x , поэтому ордината функции там равна нулю. Это даёт одно линейное уравнение на b . Значение $x=9$ ненулевое, так что можно использовать и скобку разложения.

Полученный коэффициент совпадает с Kontrollangabe. Теперь фиксируем $b=8/3$ и используем именно эту функцию в следующих подпунктах.

$$f(9) = -216 + 81b = 0 \Rightarrow b = 8/3; f(x) = (8/27)x^2(9-x).$$

Ответ. Дополнительный нуль: $x=0$. Параметр $b=8/3$, функция $f(x)=(8/27)x^2(9-x)$. Нуль 0 имеет кратность два, нуль 9 имеет кратность один.

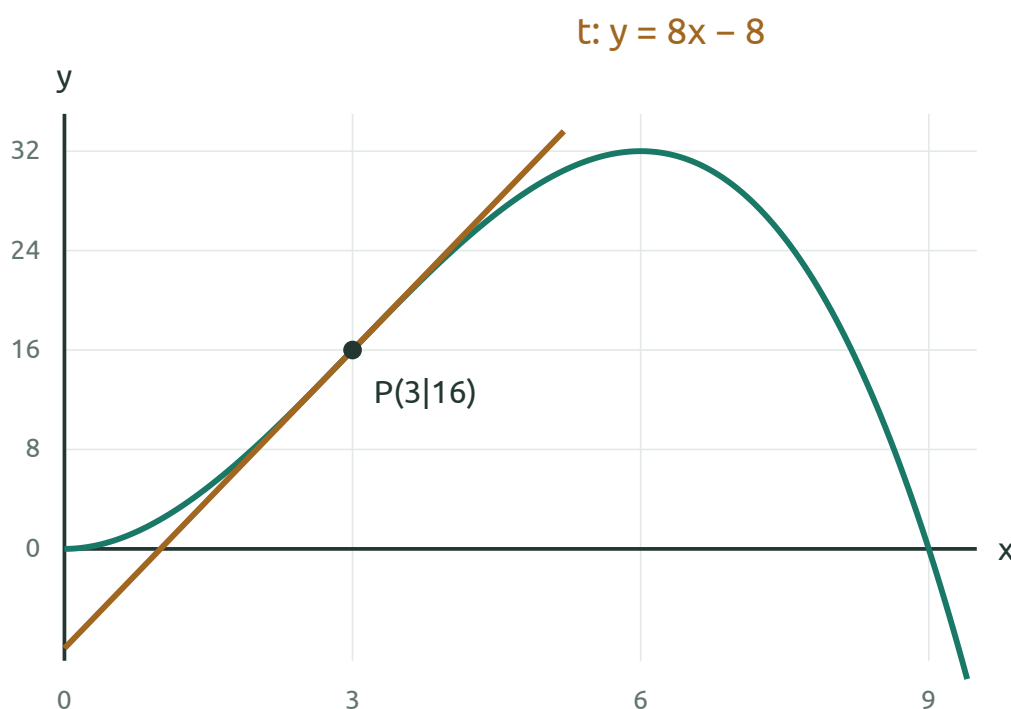
Проверка. $f(9)=0$ и $f(0)=0$. Кроме этих нулей нет других: в факторизации остаются только x^2 и линейный множитель $9-x$.

Где легко ошибиться. Контрольное значение $b=8/3$ не заменяет вычисление. Обратная подстановка подтверждает результат, но в решении нужно показать, как известный нуль определил b .

Пункт b

Die Tangente an $f(x)$ im Punkt $P(3|16)$ wird mit t bezeichnet. Berechnen Sie die Gleichung der Tangente.

Касательная к графику в точке $P(3|16)$ обозначена t . Найдите её уравнение.



$f(x) = -(8/27)x^3 + (8/3)x^2$. Касательная в $P=(3|16)$ имеет наклон 8 и уравнение $y=8x-8$. Отмечены нули $x=0$ и $x=9$.

Проверить точку и найти наклон

Сначала убедимся, что функция из части a действительно проходит через P : $f(3) = -8 + 24 = 16$. Эта проверка также помогает заметить ошибку в коэффициенте до дальнейших действий.

Производная в точке даёт наклон касательной. Для степеней используем $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$: коэффициент степени умножается на показатель, а показатель уменьшается на 1. Применяем правило к обоим слагаемым и подставляем $x=3$.

$$f'(x) = -(8/9)x^2 + (16/3)x; f'(3) = -8 + 16 = 8.$$

Записать прямую через точку с найденным наклоном

Прямая с наклоном 8, проходящая через (3,16), удовлетворяет $y-16=8(x-3)$. Раскрываем скобки только после записи этого условия: так свободный член получается из заданной точки, а не угадывается.

При $x=3$ получаем $y=16$. Производная прямой равна 8, поэтому совпадают и точка, и наклон: оба условия касания.

$t: y-16=8(x-3)$, то есть $y=8x-8$.

Ответ. Касательная t имеет уравнение $y=8x-8$.

Проверка. $t(3)=16=f(3)$ и $t'=8=f'(3)$. Дополнительно $f(x)-t(x)=-(8/27)(x-3)^3$: касательная здесь пересекает график в точке перегиба, что допустимо.

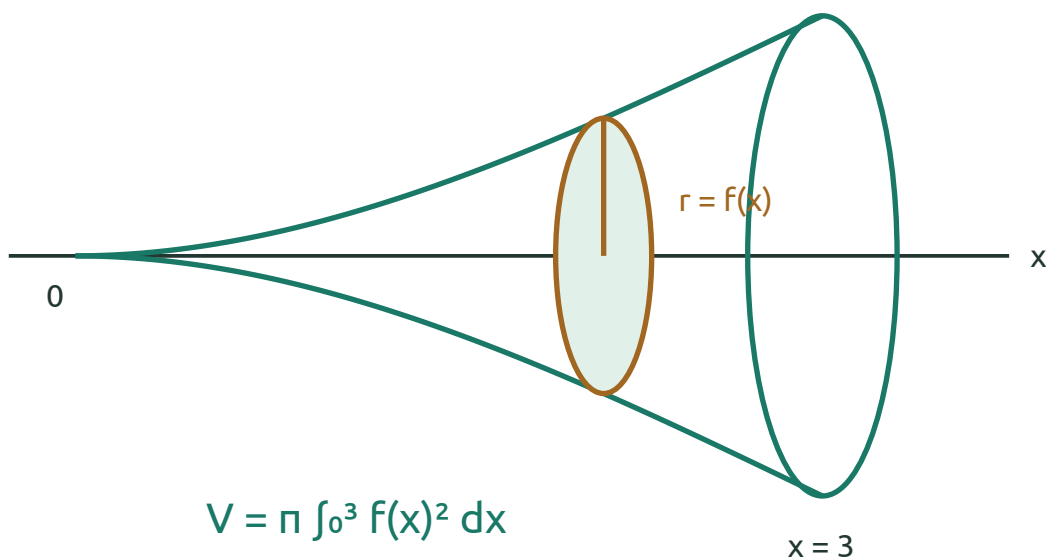
Где легко ошибиться. Касательная не обязана лежать только с одной стороны графика. В точке перегиба она может его пересекать; определяющими остаются общая точка и одинаковая производная.

Пункт с

Der Graph von f rotiert in $x \in [0;3]$ um die x -Achse. Berechnen Sie das dabei entstehende Volumen.

График f на отрезке $x \in [0;3]$ вращается вокруг оси x . Найдите объём получающегося тела вращения.

Площадь диска: $\pi \cdot f(x)^2$



На $[0;3]$ радиус поперечного диска равен $f(x)$. При вращении вокруг оси x площадь сечения равна $\pi \cdot f(x)^2$. Пространственная схема метода, не масштабный чертёж.

Определить форму сечения

На $[0;3]$ имеем $x^2 \geq 0$ и $9-x > 0$, поэтому $f(x) \geq 0$. Вертикальный отрезок от оси x до графика при вращении заполняет диск радиуса $f(x)$. Его площадь равна $\pi f(x)^2$.

Складывая тонкие диски вдоль оси x от 0 до 3, получаем интеграл объёма. Касательная из части b в границы этого тела не входит.

$$V = \pi \int_0^3 f(x)^2 dx = (64\pi/729) \int_0^3 x^4 (9-x)^2 dx.$$

Развернуть квадрат и найти первообразную

Квадрат $(9-x)^2$ равен $81-18x+x^2$. При умножении на x^4 получаются степени x^4 , x^5 и x^6 . Такая запись удобна для правила $\int x^n dx = x^{n+1}/(n+1)$.

Среднее слагаемое особенно полезно проверить: $-18x^5$ после интегрирования даёт $-3x^6$.

$$V = (64\pi/729) [81x^5/5 - 3x^6 + x^7/7]_0^3.$$

Вычислить объём без раннего округления

На нижней границе все слагаемые равны нулю. На верхней границе получаем $19683/5 - 2187 + 2187/7$. Сначала объединяем точные дроби и сокращаем, затем переходим к десятичному значению.

Длины заданы в координатных единицах, поэтому объём записываем в кубических единицах.

$$V = (64\pi/729) \cdot (72171/35) = 6336\pi/35 \approx 568,7180 \text{ куб. ед.}$$

Проверить, согласуется ли величина с геометрией

На $[0;3]$ функция возрастает от 0 до 16, поскольку $f'(x) = (8/9)x(6-x) \geq 0$. Всё тело помещается в цилиндр радиуса 16 и высоты 3. Его объём 768π заметно больше нашего результата, как и должно быть.

Для независимой алгебраической сверки можно положить $x=3u$. Тогда $f(3u) = 8u^2(3-u)$, $dx=3du$ и $V = 192\pi \int_0^1 u^4(3-u)^2 du$. Этот интеграл даёт ту же дробь $6336\pi/35$.

Ответ. $V = 6336\pi/35 \approx 568,7180$ куб. ед.

Проверка. После замены $x=3u$ получаем $V = 192\pi(9/5 - 1 + 1/7) = 6336\pi/35$. Объём положителен и меньше объёма охватывающего цилиндра 768π .

Где легко ошибиться. Интеграл $\pi f(x) dx$ не является объёмом дисков: площадь сечения содержит квадрат радиуса. Разность с касательной тоже не нужна, потому что в части с телом задаёт сам график и ось вращения.

Проверь себя

Какое равенство даёт известный нуль $x=9$?

$f(9)=0$, то есть $-216+81b=0$.

Какие два условия проверяют уравнение касательной?

Она проходит через P и имеет наклон $f'(3)$: $t(3)=16$, $t'=8$.

Почему в объёме появляется квадрат $f(x)$?

Поперечное сечение представляет собой диск радиуса $f(x)$, его площадь равна $\pi f(x)^2$.

Повторить основу: [Восстановление функции по данным](#) · [Касательная: производная и уравнение прямой](#) · [Объём вращения методом дисков](#)

Две проверки качества, биномиальная модель и нормальное приближение

In einer Fabrik, die LED-Leuchten herstellt, werden zwei Qualitätskontrollen unabhängig voneinander durchgeführt. Die Wahrscheinlichkeit, eine defekte LED-Leuchte bei der ersten Kontrolle zu entdecken ist 90%, die Wahrscheinlichkeit bei der zweiten ist 75%. a) Zeichnen Sie einen passenden Wahrscheinlichkeitsbaum und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine defekte LED-Leuchte durch mindestens eine der Qualitätskontrollen entdeckt wird. b i) In der Fabrik sind 8% der produzierten LED-Leuchten defekt. Aus der Tagesproduktion werden zufällig 20 Glühbirnen ausgewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 Glühbirnen defekt sind. b ii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Entnahme von 500 Stück zwischen 35 und 47 LED-Leuchten defekt sind.

На фабрике LED-ламп проводят две независимые проверки качества. Вероятность обнаружить дефектную лампу при первой проверке равна 90%, при второй равна 75%. а) Постройте подходящее дерево вероятностей и найдите вероятность того, что дефектную лампу обнаружит хотя бы одна из двух проверок. б i) На фабрике дефектны 8% произведённых LED-ламп. Из дневной продукции случайно выбирают 20 ламп. Найдите вероятность того, что дефектны не более двух. б ii) При той же доле брака 8% найдите вероятность того, что среди 500 выбранных LED-ламп дефектны от 35 до 47 включительно.

В первой части нужно найти вероятность обнаружения дефекта, во второй посчитать вероятность заданного числа дефектных ламп.

Замечание к источнику. В части б не указан размер всей дневной партии и не сказано, возвращают ли выбранные лампы.

Биномиальный расчёт предполагает независимые испытания с постоянной вероятностью дефекта 0,08. Для отбора без возвращения это приближение подходит, когда партия значительно больше выборки. Для точного расчёта из конечной партии нужны её размер и число дефектных изделий.

Замечание к источнику. Выражение zwischen 35 und 47 понимается как «от 35 до 47 включительно».

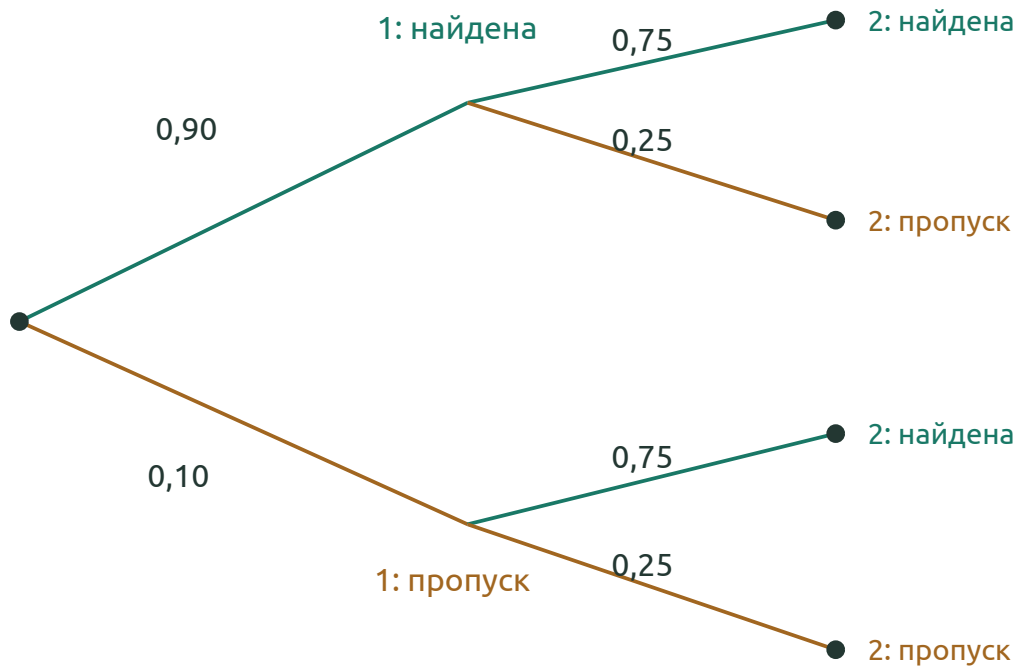
В расчёт входят оба крайних числа: $35 \leq Y \leq 47$. При нормальном приближении этому соответствует промежуток от 34,5 до 47,5.

Пункт а

Zeichnen Sie einen passenden Wahrscheinlichkeitsbaum und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine defekte LED-Leuchte durch mindestens eine der Qualitätskontrollen entdeckt wird.

Постройте подходящее дерево вероятностей и найдите вероятность того, что дефектную лампу обнаружит хотя бы одна из двух проверок.

Дефектная лампа



Дерево для уже дефектной лампы. Контроли независимы; ветви второго контроля остаются 0,75 и 0,25 после любого результата первого.

Задать события для одной дефектной лампы

Обозначим А: дефект обнаружила первая проверка, В: дефект обнаружила вторая. По условию $P(A)=0,90$ и $P(B)=0,75$. Соответственно вероятности пропуска равны 0,10 и 0,25.

Дерево имеет два уровня. Сначала идут ветви А и не А; из каждой выходят ветви В и не В. На втором уровне повторяются одни и те же числа 0,75 и 0,25, поскольку проверки независимы.

$P(A)=0,90$; $P(\text{не } A)=0,10$; $P(B)=0,75$; $P(\text{не } B)=0,25$.

Вычислить вероятности четырёх путей

Вероятности вдоль одного пути умножаются. Например, «первая обнаружила, вторая пропустила» имеет вероятность $0,90 \cdot 0,25 = 0,225$.

Получаются четыре несовместимых исхода. Вероятность обнаружения обеими проверками равна 0,675; только первой равна 0,225; только второй равна 0,075; пропуска обеими равна 0,025. Их сумма равна 1, что проверяет дерево.

$0,90 \cdot 0,75 = 0,675$; $0,90 \cdot 0,25 = 0,225$; $0,10 \cdot 0,75 = 0,075$; $0,10 \cdot 0,25 = 0,025$.

Использовать дополнение для «хотя бы одной»

Хотя бы одна проверка обнаружит дефект во всех случаях, кроме последнего пути. Поэтому проще вычесть вероятность двойного пропуска из 1, чем складывать три подходящих пути.

Результат относится к обнаружению уже дефектного изделия. Он не означает, что 97,5% всей продукции имеет дефект.

$$P(A \text{ или } B) = 1 - P(\text{не } A \text{ и не } B) = 1 - 0,10 \cdot 0,25 = 0,975 = 97,5\%.$$

Ответ. Вероятность обнаружить дефект хотя бы одной проверкой равна 0,975, то есть 97,5%.

Проверка. Сумма подходящих путей $0,675 + 0,225 + 0,075 = 0,975$. Она больше вероятности обнаружения одной первой проверкой 0,90 и не превышает 1.

Где легко ошибиться. Сумма $0,90 + 0,75 = 1,65$ дважды учитывает лампы, обнаруженные обеими проверками. Для объединения нужно вычесть пересечение или использовать дополнение.

Пункт b i

In der Fabrik sind 8% der produzierten LED-Leuchten defekt. Aus der Tagesproduktion werden zufällig 20 Glühbirnen ausgewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 Glühbirnen defekt sind.

На фабрике дефектны 8% произведённых LED-ламп. Из дневной продукции случайно выбирают 20 ламп. Найдите вероятность того, что дефектны не более двух.

Сформулировать биномиальную модель

Определим X как число дефектных изделий в выборке из 20. Каждое изделие имеет два исхода: дефектное или исправное, вероятность дефекта $p = 0,08$, число испытаний фиксировано.

Для биномиального расчёта принимаем независимость выборов с неизменной вероятностью дефекта. Это стандартная модель для случайной выборки из значительно большей продукции. Если речь идёт о существенной части конечной партии без возвращения, понадобится её размер и гипергеометрическая модель; размер партии на фото не задан.

$$X \sim \text{Bin}(n=20, p=0,08); \text{требуется } P(X \leq 2).$$

Перевести «не более двух» в сумму

Условие $X \leq 2$ допускает отсутствие брака, одну дефектную лампу или две. Эти события не могут произойти одновременно, поэтому их вероятности складываются.

Множитель $C(20, k)$ учитывает все способы выбрать, какие именно k мест в выборке заняли дефектные изделия. Без него получилась бы вероятность только одного заданного порядка.

$$P(X \leq 2) = \sum_{k=0..2} C(20, k) \cdot 0,08^k \cdot 0,92^{(20-k)}.$$

Вычислить три слагаемых

Для нуля дефектов получаем $0,92^{20}$. Для одного получаем $20 \cdot 0,08 \cdot 0,92^{19}$. Для двух получаем $C(20, 2) \cdot 0,08^2 \cdot 0,92^{18}$, где $C(20, 2) = 190$.

Складываем неокруглённые значения. На калькуляторе та же вероятность задаётся биномиальной накопленной функцией до 2 включительно.

$P(X=0) \approx 0,1887$; $P(X=1) \approx 0,3282$; $P(X=2) \approx 0,2711$. Сумма неокруглённых значений: $P(X \leq 2) \approx 0,7879$.

Ответ. В биномиальной модели $P(X \leq 2) \approx 0,7879$, или около 78,7946%.

Проверка. Среднее число дефектных ламп равно $20 \cdot 0,08 = 1,6$. Для проверки численного ответа вычисли на калькуляторе сумму $P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$ без промежуточного округления. Получится примерно 0,7879.

Где легко ошибиться. $P(X=2) \approx 0,2711$ отвечает на вопрос «ровно две», а не «не более двух». Вероятности обнаружения 0,90 и 0,75 из части а в эту биномиальную модель не входят.

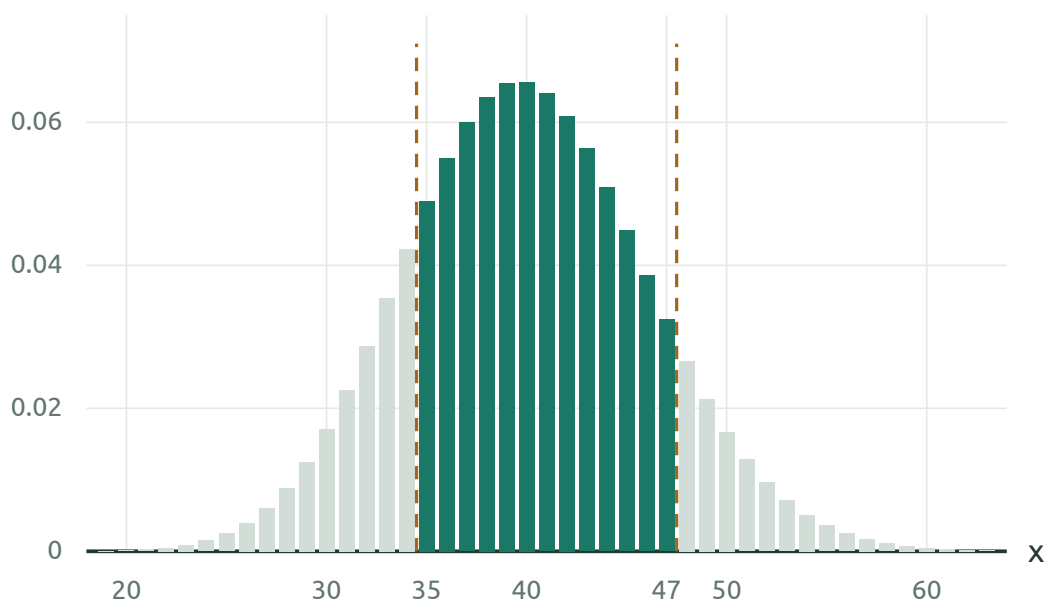
Пункт b ii

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Entnahme von 500 Stück zwischen 35 und 47 LED-Leuchten defekt sind.

При той же доле брака 8% найдите вероятность того, что среди 500 выбранных LED-ламп дефектны от 35 до 47 включительно.

$$35 \leq Y \leq 47$$

$$\mu = 40; \sigma = \sqrt{36,8}$$



Точная биномиальная модель $Y \sim \text{Bin}(500; 0,08)$. Выделены целые значения 35...47; для нормального приближения используются границы 34,5 и 47,5.

Записать точную вероятность

Теперь случайная величина Y считает дефектные лампы среди 500. Вероятность дефекта остаётся 0,08. Используем ту же предпосылку независимой биномиальной модели, что в части b i.

Слово *zwischen* понимаем как включение крайних целых значений: 35, 36, ..., 47. Если калькулятор умеет вычислять биномиальную накопленную вероятность, из $P(Y \leq 47)$ нужно вычесть $P(Y \leq 34)$. Вычитание $P(Y \leq 35)$ ошибочно удалило бы и допустимый исход $Y=35$.

$$P(35 \leq Y \leq 47) = \sum_{k=35..47} C(500, k) \cdot 0,08^k \cdot 0,92^{(500-k)} \approx 0,7066.$$

Найти параметры нормального приближения

При большом числе испытаний биномиальные вероятности около центра удобно приближать нормальным распределением. Здесь ожидаемое число дефектных равно $np=40$, исправных равно $n(1-p)=460$. Оба числа достаточно велики для обычного учебного приближения.

Нормальная величина должна иметь то же математическое ожидание и ту же дисперсию. В знаменателе стандартизации потребуется корень из дисперсии, а не сама дисперсия.

$$\mu = 500 \cdot 0,08 = 40; \sigma^2 = 500 \cdot 0,08 \cdot 0,92 = 36,8; \sigma = \sqrt{36,8} \approx 6,0663.$$

Учесть, что биномиальные значения целые

Биномиальное распределение даёт отдельную вероятность каждому целому k . В непрерывной нормальной модели этому целому значению сопоставляют полосу от $k-0,5$ до $k+0,5$.

Поэтому все столбики от 35 до 47 занимают непрерывный промежуток от 34,5 до 47,5. Поправка на непрерывность сохраняет обе крайние вероятности в приближённой площади.

$$P(35 \leq Y \leq 47) \approx P(34,5 \leq Z \leq 47,5), \text{ где } Z \sim N(\mu=40, \sigma^2=36,8).$$

Стандартизировать обе границы

Для перехода к стандартному нормальному распределению из каждой границы вычитаем среднее 40 и делим на σ . Нижняя граница ниже среднего и должна дать отрицательное z ; верхняя должна дать положительное.

$\Phi(z)$ обозначает вероятность того, что стандартная нормальная величина не больше z . Поэтому вероятность между границами равна $\Phi(\text{правая граница}) - \Phi(\text{левая граница})$. В калькулятор подставляем неокруглённые выражения для z ; числа ниже округлены только для записи.

$$z_1 = (34,5 - 40) / \sqrt{36,8} \approx -0,9066; z_2 = (47,5 - 40) / \sqrt{36,8} \approx 1,2363. \Phi(z_1) \approx 0,1823; \Phi(z_2) \approx 0,8918. \text{ Разность по неокруглённым значениям: } P \approx 0,7095.$$

Сопоставить точное значение и приближение

Точный биномиальный расчёт даёт около 70,6628%, нормальное приближение с поправкой около 70,9537%. Разница составляет примерно 0,2909 процентного пункта. Нормальная кривая приближает дискретное распределение, поэтому результаты могут немного различаться.

Биномиальная функция калькулятора даёт ответ по точной модели. Для нормального приближения запиши границы 34,5 и 47,5 и поставь знак приближения. Без поправки получилось бы около 67,0827%.

Ответ. По точной биномиальной модели $P(35 \leq Y \leq 47) \approx 0,7066$, или 70,6628%.
Нормальное приближение с поправкой от 34,5 до 47,5 даёт примерно 0,7095, или 70,9537%.

Проверка. Среднее 40 лежит внутри диапазона, поэтому нижняя стандартизованная граница отрицательна, верхняя положительна. На калькуляторе точный биномиальный результат можно проверить как $P(Y \leq 47) - P(Y \leq 34)$. Оба полученных значения вероятности лежат между 0 и 1.

Где легко ошибиться. Границы 35,5 и 46,5 исключили бы части крайних столбиков. Для включительного события нужны 34,5 и 47,5. Деление на 36,8 вместо $\sqrt{36,8}$ смешивает дисперсию со стандартным отклонением.

Проверь себя

Какое событие дополняет «хотя бы одна проверка обнаружила дефект»?

Обе проверки пропустили дефект. Его вероятность $0,10 \cdot 0,25 = 0,025$.

Какие значения X включает höchstens 2?

$X=0$, $X=1$ и $X=2$.

Почему в точной разности накопленных вероятностей вычитается $F(34)$, а не $F(35)$?

Значение 35 входит в искомый диапазон; удалить нужно только исходы до 34 включительно.

Что является σ в нормальном приближении для $n=500$ и $p=0,08$?

$\sigma = \sqrt{(500 \cdot 0,08 \cdot 0,92)} = \sqrt{36,8} \approx 6,0663$, а не 36,8.

Повторить основу: [Дерево вероятностей и дополнение события](#) · [Биномиальное распределение и накопленная вероятность](#) · [Нормальное приближение и поправка на непрерывность](#)