

Условия восьми задач

Учебная редакция от 19 октября 2026 года

Сначала решай самостоятельно. Запиши схему, формулу и вычисления. Проверять ответы удобнее по отдельному сборнику решений.

8 задач · 100 баллов

1	Наклонная пирамида: высота, боковые грани и объём	9 баллов стр. 2
2	Треугольник, ближайшая точка и прямая Эйлера	14 баллов стр. 3
3	Цилиндр: ближайшая точка, прямая и плоскость	19 баллов стр. 4
4	Бактерии: удвоение и экспоненциальный рост	8 баллов стр. 5
5	Семейство функций: экстремум, эскиз и площадь	17 баллов стр. 6
6	Треугольник под графиком: наибольшая площадь	9 баллов стр. 7
7	Кубический полином: касательная и объём	12 баллов стр. 8
8	Проверки качества и распределения вероятностей	12 баллов стр. 9

Замечания к условиям задач 3 и 6 указаны на соответствующих страницах.

Начать можно с задачи 4, затем перейти к 5, 6 и 7. Для геометрии: 2, 3, 1. Задача 8 пригодится после биномиального распределения.

Наклонная пирамида

Учебный вариант · Условия для самостоятельной работы

Gegeben ist die schiefe dreiseitige Pyramide ABCD mit der Spitze D oberhalb der horizontalen Grundebene ABC. Es gilt: $AB = 8\text{ cm}$, $AC = 11\text{ cm}$, $\angle BAC = 50^\circ$, $AD = 9\text{ cm}$ und $\angle DAC = 90^\circ$. Die Kante AD bildet mit der Grundebene einen Winkel von 56° . H ist der Fußpunkt des Lotes von D auf die Grundebene. H und B liegen auf derselben Seite der Geraden AC. Fertigen Sie eine Skizze an. Berechnen Sie die Länge BC, den Winkel $\angle BDC$, den Flächeninhalt des Dreiecks ABC und das Volumen der Pyramide ABCD.

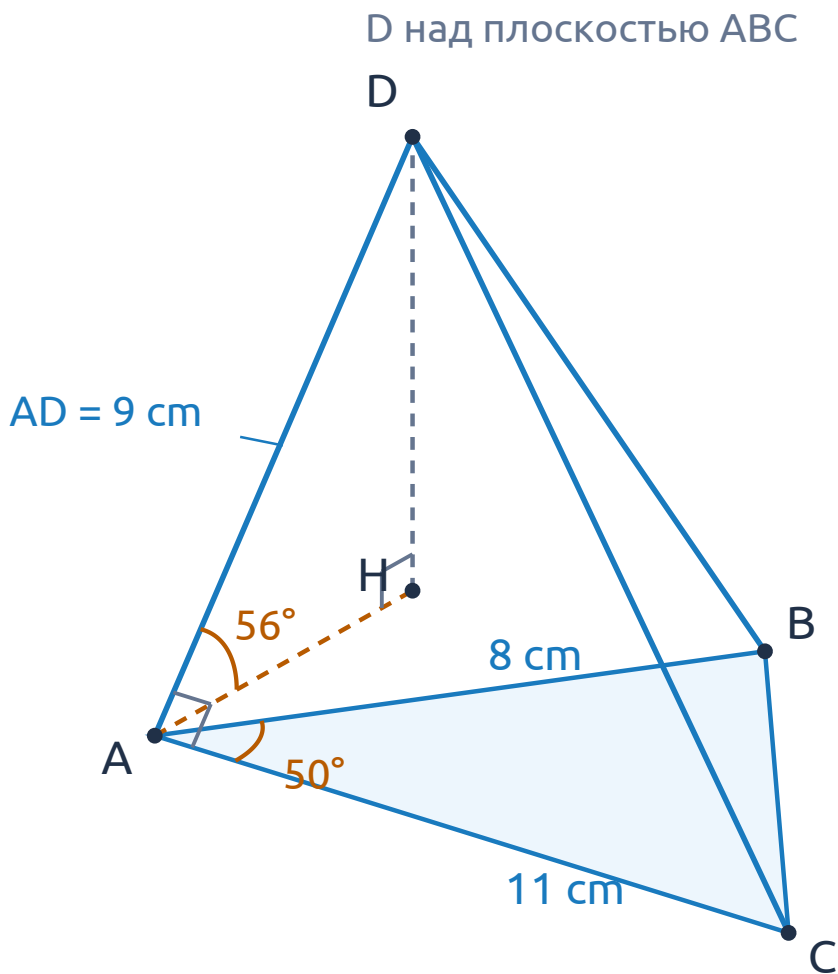


Схема к условию. Основание ABC выделено голубым; DH перпендикулярен плоскости основания. H и B лежат по одну сторону от AC. Пунктир AH показывает проекцию ребра AD. Пространственные углы показаны в перспективе.

Треугольник, ближайшая точка прямой и прямая Эйлера

Die Eckpunkte eines Dreiecks sind $A(2|1)$, $B(10|5)$ und $C(6|13)$. Die Gerade g geht durch die Punkte $P(0|3)$ und $Q(12|9)$. a) Untersuchen Sie rechnerisch, ob das Dreieck rechtwinklig ist. Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks. b) Berechnen Sie die kürzeste Entfernung vom Punkt $D(8|2)$ zur Geraden g und bestimmen Sie die Koordinaten des Lotfußpunktes L von D auf die Gerade g . c) Bestimmen Sie die Geradengleichung der Eulerschen Geraden des Dreiecks.

Цилиндр: ближайшая точка, вертикальная плоскость и запасные данные

In einem Koordinatensystem ist ein gerader Zylinder mit dem Radius 5 und der Höhe 10 gegeben, dessen Grundfläche in der x - y -Ebene liegt. $M(8|5|10)$ ist der Mittelpunkt der Deckfläche des Zylinders. a) Weisen Sie nach, dass der Punkt $P(5|1|0)$ auf dem Rand der Grundfläche des Zylinders liegt. b) Unter allen Punkten auf dem Rand der Deckfläche hat der Punkt S den kleinsten Abstand von P , der Punkt T den größten. Geben Sie die Koordinaten von S und T an. c) Die Gerade g geht durch die Punkte M und S . [Ersatzangabe: $S(11|9|10)$] Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden g . Stellen Sie die Gleichung der Ebene e in Normalform auf, die die Gerade g enthält und senkrecht zur x - y -Ebene liegt. [Kontrollangabe: $e: 4x-3y=17$] d) Geben Sie die Gleichung der Geraden h an, die eine Mittelsenkrechte zur Strecke SM ist und die senkrecht zur Ebene e verläuft. e) Gegeben ist $A(14,5|-3|10)$. Das Dreieck MSA bildet die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze im Punkt P . Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide.

Замечание к исходнику. Запасная точка $S(11|9|10)$ отличается от ближайшей точки, которую требуется найти в b.

Ersatzangabe означает запасные данные для продолжения решения. Эта точка совпадает с дальней T и не заменяет ответ на b. Далее ближайшая точка обозначена S , запасная S_E . В c обе дают одну прямую и плоскость, в d получаются разные прямые, в e объёмы совпадают.

Бактерии: удвоение за 20 минут и рост за час

Manche Bakterien können sich unter optimalen Bedingungen etwa alle 20 Minuten verdoppeln. a) Stellen Sie für diese Bakterienart die natürliche Exponentialfunktion $N(t)$ für ein stündliches Wachstum auf und berechnen Sie, um wie viel Prozent die Anzahl solcher Bakterien pro Stunde zunimmt. b) Wie groß ist die Bakterienzahl nach 3 Stunden Wachstum, wenn zu Beginn der Messung 1 Million Bakterien vorhanden waren und berechnen Sie für diesen Fall, nach welcher Zeit 1 Milliarde Bakterien vorhanden sind.

Замечание к источнику. Расчёт предполагает, что бактерии удваиваются каждые 20 минут в течение всего рассматриваемого времени.

Это экспоненциальная модель при указанных оптимальных условиях. Изменение питания или других условий в ней не учитывается.

Семейство $3xe^{(kx)}$: экстремум, эскиз и площадь

Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten $g_k: x \mapsto 3x \cdot e^{(k \cdot x)}$, mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Der Graph jeder Funktion g_k der Schar hat genau einen Extrempunkt E_k . a) Bestimmen Sie die Koordinaten von E_k . b) Der Graph einer Funktion $G(x)$ aus der Schar g_k besitzt den Hochpunkt $(4|12/e)$. Bestimmen Sie den Parameter k und stellen Sie die dazugehörige Funktionsgleichung auf. c) Berechnen Sie die Nullstelle x_N und die Extremstelle x_E der Funktion $g_{0,5}: x \mapsto 3x \cdot e^{(0,5x)}$ und erstellen Sie eine Skizze des Graphen für $x \in [-10; 1]$, mit $E_x = E_y = 1$ cm. d) Berechnen Sie den endlichen Flächeninhalt, den der Graph von $g_{0,5}$ mit der x -Achse in $[-2; 0]$ einschließt.

Треугольник под $y=x \ln x$: знак высоты и наибольшая площадь

Gegeben ist die Funktion $f(x)=x \cdot \ln(x)$, mit $x>0$. Betrachtet werden die Dreiecke OPQ mit $O(0|0)$, $P(a|0)$ und $Q(a|f(a))$ und $0<a<1$. Ergänzung dieser Lernfassung: Die zweite Koordinate von P ist am rechten Fotorand abgeschnitten; hier wird $P(a|0)$ ausdrücklich angenommen. a) Begründen Sie rechnerisch, dass der Flächeninhalt jedes dieser Dreiecke mit dem Term $\frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \ln(a)$ bestimmt werden kann. (Der Term ist hier so wiedergegeben, wie er auf dem Foto gedruckt ist.) b) Unter den betrachteten Dreiecken hat eines den größten Flächeninhalt. Bestimmen Sie den zugehörigen Wert a.

Замечание к исходнику. В напечатанной формуле площади $\frac{1}{2}a^2 \ln(a)$ не хватает минуса.

При $0<a<1$ логарифм отрицателен, а геометрическая площадь положительна. Для точек $O(0|0)$, $P(a|0)$, $Q(a|a \ln a)$ получается $A(a)=-\frac{1}{2}a^2 \ln(a)$. В условии сохранён напечатанный знак, а в решении объяснено исправление.

Замечание к исходнику. Вторая координата точки P обрезана на фотографии.

В разборе явно принимается $P(a|0)$: P лежит на оси x, а PQ вертикален. Все результаты о площади относятся к этой конфигурации. Полностью прочесть координату P по имеющейся фотографии нельзя.

Кубический полином: коэффициент, касательная и объём

Gegeben ist die reelle Funktion $f(x) = -\frac{8}{27}x^3 + bx^2$, mit $b \in \mathbb{R}$. a) Zusätzlich zu $x=9$ hat $f(x)$ eine weitere Nullstelle. Berechnen Sie diese und bestimmen Sie rechnerisch den Wert von b . [Kontrollangabe: $b=8/3$] b) Die Tangente an $f(x)$ im Punkt $P(3|16)$ wird mit t bezeichnet. Berechnen Sie die Gleichung der Tangente. c) Der Graph von f rotiert in $x \in [0;3]$ um die x -Achse. Berechnen Sie das dabei entstehende Volumen.

Замечание к исходнику. В пункте c спрашивается объём, хотя в условии говорится о вращении графика.

Объём относится к телу, полученному вращением области между графиком и осью x на отрезке $[0;3]$. Сам график при вращении даёт поверхность. Для расчёта ниже используется именно эта область.

Две проверки качества, биномиальная модель и нормальное приближение

In einer Fabrik, die LED-Leuchten herstellt, werden zwei Qualitätskontrollen unabhängig voneinander durchgeführt. Die Wahrscheinlichkeit, eine defekte LED-Leuchte bei der ersten Kontrolle zu entdecken ist 90%, die Wahrscheinlichkeit bei der zweiten ist 75%. a) Zeichnen Sie einen passenden Wahrscheinlichkeitsbaum und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine defekte LED-Leuchte durch mindestens eine der Qualitätskontrollen entdeckt wird. b i) In der Fabrik sind 8% der produzierten LED-Leuchten defekt. Aus der Tagesproduktion werden zufällig 20 Glühbirnen ausgewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 Glühbirnen defekt sind. b ii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Entnahme von 500 Stück zwischen 35 und 47 LED-Leuchten defekt sind.

Замечание к исходнику. В части b не указан размер всей дневной партии и не сказано, возвращают ли выбранные лампы.

Биномиальный расчёт предполагает независимые испытания с постоянной вероятностью дефекта 0,08. Для отбора без возвращения это приближение подходит, когда партия значительно больше выборки. Для точного расчёта из конечной партии нужны её размер и число дефектных изделий.

Замечание к исходнику. Выражение zwischen 35 und 47 понимается как «от 35 до 47 включительно».

В расчёт входят оба крайних числа: $35 \leq Y \leq 47$. При нормальном приближении этому соответствует промежуток от 34,5 до 47,5.