Рост и распад

Теория и разобранные задачи

Приближённые значения записаны до четырёх знаков после запятой. В вычислениях сохраняй точные выражения до последнего шага. Число объектов и время на часах округляются по смыслу задачи.

Задача. Количество ежегодно увеличивается на 10%. Вначале было 200 единиц. Сколько будет через один, два и три года, если каждый год процент считают от количества на начало этого года?

Рост на 10% означает: прежние 100% сохраняются, ещё 10% добавляются. Получаем **100%+10%=110%=1,1** от прежнего количества. Поэтому для одного года умножаем на 1,1: 200·1,1=220.

На второй год берём 10% уже от 220: 220·1,1=242. На третий год получаем 242·1,1=266,2. Повторяющееся умножение удобно записать степенью: через три года будет $200\cdot1{,}1^3$.

$N(t)=N_0\cdot a^t$. Здесь $N_0=N(0)$ обозначает начальное количество, **Anfangswert** или **Anfangsbestand**. Буква t обозначает время от выбранного начала. Сразу подпиши единицу: часы, дни или годы. N(t) показывает количество через это время. Это функция от времени: выбираем t и получаем количество N(t).

Число a есть множитель за одну выбранную единицу времени. При росте это **Wachstumsfaktor**, при распаде **Zerfallsfaktor**. В нашей задаче $N_0=200$, t измеряется в годах, a=1,1. Поэтому $N(t)=200\cdot1{,}1^t$. При t=0 получаем $a^0=1$, и формула возвращает начальные 200.

1. Как найти множитель по проценту

Задача. Количество растений растёт на 20% за день, а масса вещества уменьшается на 15% за час. Найди множитель для каждого процесса и объясни его смысл.

При росте остаются прежние 100% и добавляются 20%. Значит, после одного дня будет 120% от прежнего количества: **a=1+20/100=1,2**. Это дневной Wachstumsfaktor.

При распаде из 100% исчезают 15%, остаются 85%. Поэтому часовой Zerfallsfaktor равен **a=1−15/100=0,85**. Умножение на 0,85 оставляет 85% прежней массы.

Обратное действие тоже полезно. Если a=1,2, прирост равен (1,2−1)·100%=20%. Если a=0,85, уменьшение равно (1−0,85)·100%=15%. Сам множитель учитывает всё оставшееся количество.

Для положительного количества $N_0>0$ и a>0. При a>1 идёт рост, при 0<a<1 распад. При a=1 количество постоянно: $N(t)=N_0$. Эти признаки помогают проверить, подходит ли найденный множитель.

2. Единица времени и начало отсчёта

Задача. В начале наблюдения есть 100 г вещества. Масса экспоненциально уменьшается на 20% каждый час. Сколько останется через 30 минут? Запиши модель с временем в часах, затем в минутах.

За час остаётся 80%, поэтому a=0,8. Если t считаем в часах от начала наблюдения, масса в граммах равна $\mathbf{N(t)=100\cdot0{,}8^t}$.

Тридцать минут составляют половину часа. Подставляем t=0,5: $\mathbf{N(0{,}5)=100\cdot0{,}8^{0{,}5}\approx89{,}4427}$ **г**. Дробное время допустимо в непрерывной экспоненциальной модели. Подстановка t=30 означала бы 30 часов.

Для времени s в минутах нужен минутный множитель b. За 60 минут он должен дать часовой множитель: $b^{60}=0{,}8$. Отсюда $b=0{,}8^{1/60}$ и $\mathbf{M(s)=100\cdot b^s}$. Проверка: $M(30)=100\cdot0{,}8^{30/60}$, получается та же масса.

3. Как составить функцию по двум измерениям

Задача. Количество растёт экспоненциально. Через 2 часа после начала наблюдений было 180 единиц, через 5 часов было 607,5. Найди часовой множитель, начальное количество и формулу функции. На сколько процентов количество растёт за час?

Время t считаем в часах от начала наблюдений. Записываем известные значения: $\mathbf{N(2)=N_0a^2=180;\ N(5)=N_0a^5=607{,}5}$. Первое измерение сделано через два часа, поэтому 180 пока нельзя принимать за N_0.

Начальное количество в обоих равенствах одно и то же. Разделим второе равенство на первое, чтобы его убрать: $\mathbf{a^5/a^2=607{,}5/180}$, то есть $\mathbf{a^3=3{,}375}$. Между измерениями прошло $5-2=3$ часа, поэтому справа стоит множитель за три часа.

Нужно найти один из трёх одинаковых множителей. Извлекаем положительный кубический корень: $\mathbf{a=\sqrt[3]{3{,}375}=1{,}5}$. За час остаётся прежнее количество и добавляется ещё половина, то есть рост равен $(1{,}5-1)\cdot100\%=50\%$.

Теперь вернёмся к первому измерению. Из $N_0\cdot1{,}5^2=180$ получаем $\mathbf{N_0=180/1{,}5^2=80}$. Функция: $\mathbf{N(t)=80\cdot1{,}5^t}$. Проверяем оба измерения: N(2)=180 и N(5)=607,5.

Тот же ход работает для любых двух положительных измерений $N(t_1)$ и $N(t_2)$, где $t_2>t_1$. Деление даёт $a^{t_2-t_1}=N(t_2)/N(t_1)$, поэтому $\mathbf{a=[N(t_2)/N(t_1)]^{1/(t_2-t_1)}}$, а затем $\mathbf{N_0=N(t_1)/a^{t_1}}$.

Подставив найденные величины, получаем общую формулу: $\mathbf{N(t)=N(t_1)\cdot[N(t_2)/N(t_1)]^{(t-t_1)/(t_2-t_1)}}$. Здесь $t-t_1$ показывает, сколько времени прошло от первого измерения. Для нашей задачи это $N(t)=180\cdot3{,}375^{(t-2)/3}$, та же функция $80\cdot1{,}5^t$.

4. Рост за один час и за два часа

Задача. Число бактерий растёт экспоненциально: через 2 часа после начала опыта их 800, через 4 часа их 2500. a) Найди начальное число и функцию роста. b) Найди процент роста за один час и за два часа. c) Сколько бактерий будет по модели через 9 часов?

a) Из $N_0a^2=800$ и $N_0a^4=2500$ делением получаем $\mathbf{a^2=2500/800=3{,}125}$. Это множитель за два часа. Часовой множитель: $\mathbf{a=\sqrt{3{,}125}\approx1{,}7678}$.

Чтобы вернуться к началу опыта, делим первое измерение на двухчасовой множитель: $\mathbf{N_0=800/3{,}125=256}$. Функция $\mathbf{N(t)=256\cdot(\sqrt{3{,}125})^t}$, время в часах. Подстановка t=2 и t=4 возвращает 800 и 2500.

b) Часовой множитель $a\approx1{,}7678$ означает **176,7767%=100%+76,7767%** от прежнего количества. Поэтому рост за час равен $\mathbf{(a-1)\cdot100\%\approx76{,}7767\%}$. За два часа множитель $a^2=3{,}125$ означает **312,5%=100%+212,5%**, то есть рост равен **212,5%**. За второй час процент берётся уже от увеличившегося количества; два часа нельзя получить простым удвоением часового процента.

c) Подставляем t=9: **$N(9)=256\cdot(\sqrt{3,125})^9\approx43158,3729$**. Округляя число бактерий до целого, получаем около 43 158. В расчёте сохраняем точный корень до последнего шага.

5. Как найти время по известному остатку

Задача. Вначале есть 100 г вещества. Масса экспоненциально уменьшается на 20% за час. Через сколько часов останется ровно 30 г?

Часовой множитель a=0,8, поэтому $N(t)=100\cdot0,8^t$. Обозначим искомое время t_1. В этот момент масса по условию равна 30: **$100\cdot0,8^{t_1}=30$**.

Сначала делим обе части на 100, чтобы оставить степень отдельно: **$0,8^{t_1}=0,3$**. Теперь неизвестен показатель t_1. Чтобы вынести его из степени, берём натуральный логарифм ln от обеих положительных частей.

Свойство **$\ln(a^x)=x\cdot\ln a$** при a>0 даёт **$t_1\cdot\ln 0,8=\ln 0,3$**. Делим на ln 0,8 и получаем **$t_1=\ln 0,3/\ln 0,8\approx5,3955$ часа**. Останется 30 г примерно через 5,3955 часа.

Подстановка найденного t_1 в N(t) возвращает 30. Когда неизвестно основание a, как в задаче с двумя измерениями, используем корень. Когда неизвестен показатель t, используем логарифм.

6. Как перейти к записи через e и λ

Задача. Вначале есть 200 единиц. Количество растёт на 10% в год. Запиши функцию в виде $N(t)=N_0e^{\lambda t}$ и найди константу роста λ; время t измеряется в годах.

Сначала используем знакомый множитель: a=1,1, поэтому $N(t)=200\cdot1,1^t$. Чтобы получить степень с основанием e, представим **$a=e^{\lambda}$**. Логарифмирование даёт **$\lambda=\ln a$**.

Значит, **$\lambda=\ln 1,1\approx0,0953$ год$^{-1}$** и **$N(t)=200e^{(\ln 1,1)t}$**. Это та же функция: $e^{\lambda t}=(e^{\lambda})^t=a^t$. Её называют **natürliche Exponentialfunktion**.

В записи $N(t)=N_0e^{\lambda t}$ при росте λ>0, при распаде λ<0, при постоянном количестве λ=0. Отрицательная λ уже задаёт распад. Если написать перед ней ещё один минус, получится рост.

λ и процент роста относятся к разным величинам. Здесь годовой рост 10%, а λ≈0,0953. Если дана λ, сначала найди **$a=e^{\lambda}$**, затем переведи множитель в процент. Единица λ зависит от единицы времени: для часов это ч$^{-1}$, для лет год$^{-1}$.

7. Население: процентный рост и постоянная прибавка

Задача. Восемь лет назад население страны составляло 21 миллион и с тех пор ежегодно увеличивалось на 3,2%. a) Найди константу роста λ и естественную экспоненциальную функцию. b) Сколько жителей сейчас? c) Через какой срок от начальных 21 миллиона население утроится? d) Какой постоянный годовой прирост нужен линейной модели, чтобы за тот же срок вырасти с 21 до 63 миллионов?

a) Ставим t=0 восемь лет назад; сегодня t=8. Время считаем в годах, население в миллионах. За год остаётся 100% и добавляется 3,2%, поэтому **$a=1+3,2/100=1,032$**.

Для записи через e берём **$\lambda=\ln 1,032\approx0,0315$ год$^{-1}$**. Получаем **$N(t)=21\cdot1,032^t=21e^{(\ln 1,032)t}$**.

b) Сегодня прошло восемь лет от выбранного начала. Подставляем t=8: **$N(8)=21\cdot1,032^8\approx27,0182$**. Население составляет примерно 27,0182 миллиона жителей.

c) Утроить 21 миллион значит получить 63 миллиона. Составляем $21 \cdot 1{,}032^{T} = 63$ и делим на 21: $\mathbf{1{,}032^{T} = 3}$. После логарифмирования $T \cdot \ln 1{,}032 = \ln 3$.

Отсюда $\mathbf{T = \ln 3 / \ln 1{,}032 \approx 34{,}8781}$ **года** от начальных 21 миллиона. Восемь лет уже прошли, поэтому от сегодняшнего дня осталось $\mathbf{T - 8 \approx 26{,}8781}$ **года**.

d) Линейная модель добавляет одинаковое количество с каждый год: $L(t) = 21 + ct$. За T лет нужно добавить $63 - 21 = 42$ миллиона. Делим общий прирост на число лет: $\mathbf{c = 42/T \approx 1{,}2042}$ **миллиона жителей в год**.

Ответ: $\mathbf{L(t) = 21 + (42/T)t}$, где $T = \ln 3 / \ln 1{,}032$. Проверка: $N(0) = L(0) = 21$ и $N(T) = L(T) = 63$. В промежуточные моменты население в двух моделях может различаться: у одной постоянна годовая прибавка, у другой годовой множитель.

8. Изотоп: период полураспада, масса и доля остатка

Задача. Радиоактивный изотоп имеет период полураспада 12,26 года. a) Найди константу распада λ и закон распада. b) Сколько граммов останется через 60 лет, если вначале было 66,2 г? c) Через сколько лет останется 12,3% исходного количества?

a) Halbwertszeit означает время, за которое остаётся половина. Пусть $N(t) = N_0 a^{t}$, время в годах. Через 12,26 года имеем $\mathbf{N_0 a^{12{,}26} = N_0/2}$. Делим на положительное N_0: $a^{12{,}26} = 1/2$.

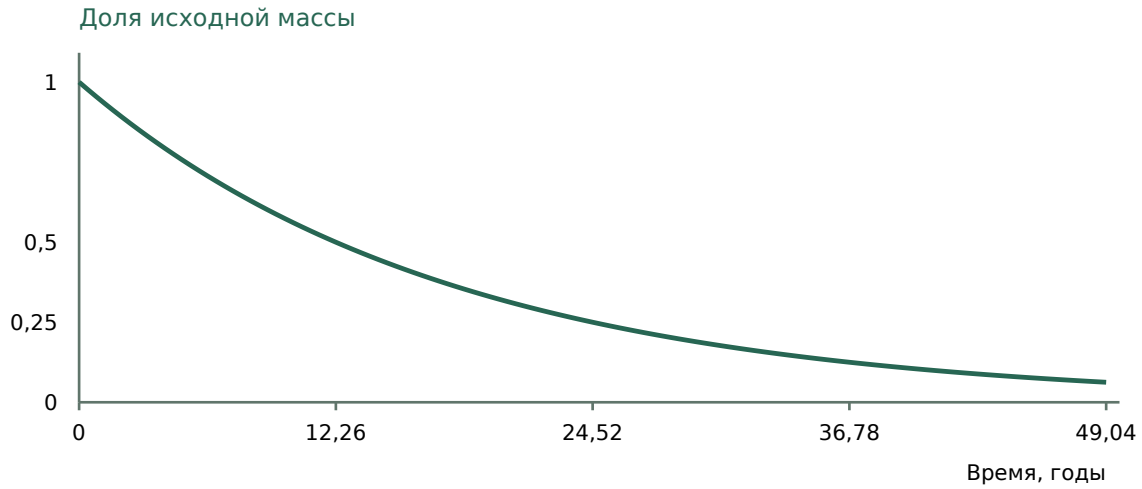
Находим годовой множитель: $\mathbf{a = (1/2)^{1/12{,}26} \approx 0{,}9450}$. Затем $\mathbf{\lambda = \ln a = \ln(1/2)/12{,}26 \approx -0{,}0565}$ **год**$^{-1}$. Закон распада: $\mathbf{N(t) = N_0 \cdot (1/2)^{t/12{,}26} = N_0 e^{\lambda t}}$.

b) Теперь известно начальное количество: $N_0 = 66{,}2$ г. Подставляем $t = 60$: $\mathbf{N(60) = 66{,}2 \cdot (1/2)^{60/12{,}26} \approx 2{,}2265}$ **г**. Останется примерно 2,2265 г.

c) Остаток 12,3% означает 0,123 от начальной массы. Составляем $\mathbf{N_0 a^{t_1} = 0{,}123 N_0}$. Начальная масса сокращается, поэтому знать её для этого пункта не нужно: $a^{t_1} = 0{,}123$.

Логарифмируем и делим на $\ln a$: $\mathbf{t_1 = \ln 0{,}123 / \ln a \approx 37{,}0653}$ **года**. Ответ: примерно через 37,0653 года. Это время меньше 60 лет, и остаток в пункте b действительно меньше 12,3% от 66,2 г.

Проверка закона: при $t = 12{,}26$ показатель $t/12{,}26$ равен 1, остаётся ровно половина. Если, наоборот, дан множитель распада a и нужно найти период T, из $a^{T} = 1/2$ получается $\mathbf{T = \ln(1/2)/\ln a}$.



9. Период удвоения

Задача. Начальное количество равно 540 единиц. Оно удваивается каждые 9 месяцев. Найди месячный множитель и функцию роста. Через сколько месяцев количество достигнет 1800 единиц?

Verdopplungszeit означает время удвоения. За 9 месяцев из 540 должно получиться 1080: $\mathbf{540a^9=1080}$. Делим на 540 и получаем $a^9=2$. Поэтому $\mathbf{a=2^{1/9}\approx1{,}0801}$.

При t в месяцах функция равна $\mathbf{N(t)=540\cdot2^{t/9}}$. Для искомого момента t_1 составляем $\mathbf{540a^{t_1}=1800}$. Сначала делим на 540, затем логарифмируем: $t_1\cdot\ln a=\ln(1800/540)$.

Получаем $\mathbf{t_1=\ln(1800/540)/\ln a\approx15{,}6327}$ **месяца**. Проверка: через 9 месяцев будет 1080, через 18 месяцев 2160. Число 1800 достигается между этими моментами.

Если годовой или часовой множитель роста a уже известен, время удвоения T находят из $a^T=2$: $\mathbf{T=\ln 2/\ln a}$. Единица T будет той же, для которой задан a.

10. Цезий: от годового распада к остатку

Задача. В модели распада цезия за каждый год исчезает 2,3% имеющегося количества. Начало отсчёта находится в 1986 году. a) Запиши закон распада и найди λ. b) Сколько процентов количества 1986 года останется к тому же моменту 2025 года? c) Найди период полураспада по этой модели.

a) После года остаётся 100%−2,3%=97,7%, поэтому $\mathbf{a=0{,}977}$. При t в годах от 1986 года получаем $\mathbf{N(t)=N_0\cdot0{,}977^t}$. Константа $\mathbf{\lambda=\ln 0{,}977\approx-0{,}0233}$ **год**$^{-1}$, а запись через e имеет вид $N(t)=N_0e^{\lambda t}$.

b) Между указанными моментами прошло 2025−1986=39 лет. Ищем долю остатка, поэтому делим на начальное количество: $\mathbf{N(39)/N_0=0{,}977^{39}\approx0{,}4035}$. В процентах это **около 40,3541%**.

c) Половина означает $N(T)=N_0/2$. После сокращения N_0 имеем $\mathbf{0{,}977^T=1/2}$. Логарифмирование даёт $\mathbf{T=\ln(1/2)/\ln 0{,}977\approx29{,}7889}$ **года**.

Проверка: 39 лет больше найденного периода полураспада, поэтому остаток должен быть меньше 50%. Полученные 40,3541% этому соответствуют. Все числа относятся к заданному годовому распаду 2,3%.

11. Пунш: остаток к заданному времени и строгий порог

Задача. После пунша в 22:30 в организме находится 48 г алкоголя. В заданной экспоненциальной модели количество уменьшается вдвое за 4 часа, нового алкоголя не поступает. a) Найди λ и функцию A(t), где t означает часы после 22:30. b) Сколько останется в 02:30 следующего дня? c) После какого времени останется меньше 12,5% начального количества?

a) За четыре часа из 48 г должно остаться 24 г. Поэтому $\mathbf{48a^4=24}$, откуда $a^4=1/2$ и $\mathbf{a=(1/2)^{1/4}\approx0{,}8409}$. Часовой множитель меньше 1, что согласуется с уменьшением.

Константа $\mathbf{\lambda=\ln a=\ln(1/2)/4\approx-0{,}1733}$ **ч**$^{-1}$. Количество в граммах описывает функция $\mathbf{A(t)=48\cdot(1/2)^{t/4}=48e^{\lambda t}}$.

b) От 22:30 до 02:30 прошло 4 часа, поэтому $\mathbf{A(4)=48\cdot(1/2)=24}$ **г**. Переход через полночь не меняет длительность.

c) Переведём порог в граммы: 12,5% от 48 г равны 48·0,125=6 г. Сначала находим момент равенства: **$48a^{t_1}=6$**. После деления на 48 и логарифмирования получаем **$t_1=\ln(6/48)/\ln a=12$ часов**.

Двенадцать часов после 22:30 дают 10:30 следующего дня. В этот момент остаётся ровно 12,5%. Слово **weniger als** означает строго меньше, поэтому ответ: **после 10:30 следующего дня**, то есть t>12. Проверка по половинам: 48, 24, 12, 6 г через 0, 4, 8, 12 часов.

Задача. Масса задана функцией $N(t)=100\cdot0{,}8^t$ г, время в часах. Найди первый целый час, когда масса станет меньше 30 г. Граница из равенства $100\cdot0{,}8^t=30$ равна $t\approx5{,}3955$. Проверяем соседние целые часы: N(5)=32,768 г, N(6)=26,2144 г. Ответ: через 6 часов. Проверка целых значений нужна потому, что её прямо требует условие.

12. Риск: проценты и процентные пункты

Задача. В модели из условия риск заболевания составляет 40% в момент отказа от курения и 32% через два года. Считай убывание экспоненциальным. a) Составь функцию и найди ежегодное относительное уменьшение. b) Найди риск через 25 лет. c) Когда он снизится до 1%? d) Может ли эта модель достичь 0%?

a) Время t считаем в годах после отказа от курения, значения R(t) записываем в процентах. Поэтому R(0)=40 и R(2)=32. Подставляем в **$R(t)=40a^t$**: $40a^2=32$.

Делим на 40: $a^2=0{,}8$. Это множитель за два года. Годовой множитель равен **$a=\sqrt{0{,}8}\approx0{,}8944$**. Он означает, что за год остаётся **89,4427%=100%−10,5573%** прежнего значения. Значит, ежегодное относительное уменьшение равно **$(1-a)\cdot100\%\approx10{,}5573\%$**. Функция: **$R(t)=40\cdot(\sqrt{0{,}8})^t$**. При записи через e константа $\lambda=\ln a\approx-0{,}1116$ год$^{-1}$.

За два года риск уменьшился на **40−32=8 процентных пунктов**, по-немецки **Prozentpunkte**. Относительно исходных 40% уменьшение составляет **(40−32)/40=20%**. Процентные пункты получаем вычитанием самих долей, относительный процент требует ещё деления на исходную долю.

b) Подставляем t=25: **$R(25)=40\cdot(\sqrt{0{,}8})^{25}\approx2{,}4586$**. По модели риск составляет около **2,4586%**.

c) В нашей шкале порог 1% записывается числом 1. Составляем **$40a^{t_1}=1$**, делим на 40 и логарифмируем: $t_1\cdot\ln a=\ln(1/40)$. Получаем **$t_1\approx33{,}0628$ года**. При записи риска долями 0,40 и 0,32 порог был бы 0,01; время осталось бы тем же.

d) При любом конечном t число a^t положительно. Поэтому эта модель приближается к 0%, но точно его не достигает. Проверка предыдущих пунктов: R(2)=32%, а до 1% требуется больше 25 лет.

13. Лес: рост до вырубки и после неё

Задача. Десять лет назад объём древесины в лесу составлял 7000 м³. Сегодня без вырубки он достиг 9880 м³. Рост экспоненциальный. a) Найди годовой процент роста. b) Найди период удвоения. c) Через четыре года вырубят 4000 м³. Когда после вырубки лес снова достигнет сегодняшних 9880 м³? После вырубки годовой множитель роста остаётся прежним.

a) За десять лет множитель применяется десять раз: **$7000a^{10}=9880$**. Делим на 7000 и извлекаем положительный корень десятой степени: **$a=(9880/7000)^{1/10}\approx1{,}0351$**. Годовой рост равен **$(a-1)\cdot100\%\approx3{,}5061\%$**.

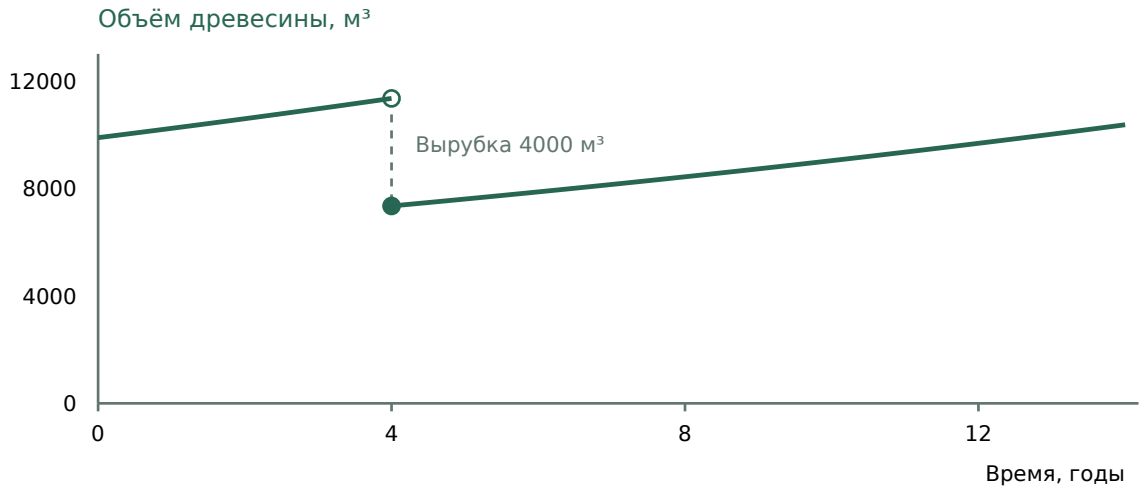
b) Для удвоения нужно $a^T=2$. Логарифмирование даёт **$T=\ln2/\ln a\approx20{,}1144$ года**.

c) Теперь отсчитываем t от сегодняшнего дня. До вырубки **$H(t)=9880a^t$**. Сначала вычисляем объём через четыре года: **$H(4)\approx11340{,}1946$ м³**. Вырубка происходит тогда, поэтому вычитаем 4000 из этого числа: **$M_0=9880a^4-4000\approx7340{,}1946$ м³**.

После вырубки начинаем новый отсчёт: s обозначает годы после неё. Прежний множитель действует на оставшуюся древесину, поэтому **$M(s)=M_0a^s$**. Для возвращения к сегодняшнему объёму составляем $M_0a^{s_1}=9880$.

Делим на M_0, затем логарифмируем: **$s_1=\ln(9880/M_0)/\ln a\approx8{,}6229$ года после вырубки**. От сегодняшнего дня это **$4+s_1\approx12{,}6229$ года**. В расчёте используем точное $M_0=9880a^4-4000$.

Проверка: сразу после вырубки остаётся положительный объём меньше 9880 м³, поэтому для восстановления нужно время. Если оставить один отсчёт t от сегодня, после вырубки $s=t-4$ и объём равен **M_0a^{t-4} при $t\geq4$**. При добавлении вещества действует тот же порядок: сначала найдём количество к событию, прибавим поступившее и примем результат за новое начальное количество.



14. Как сравнить две модели роста

Задача. Вирус Alpha распространяется экспоненциально: сначала заражён один компьютер, через 24 часа их 200. Для вируса Beta одновременно дана функция $B(t)=420000\cdot1{,}08^t$, время в часах от общего начала. a) Составь функцию Alpha и найди число заражённых через 72 часа. b) Найди время удвоения Alpha. c) Когда у Alpha заражённых компьютеров будет вдвое меньше, чем у Beta?

a) Из $A(0)=1$ получаем $A(t)=a^t$. Второе измерение даёт **$a^{24}=200$**, поэтому **$a=200^{1/24}\approx1{,}2470$**. Функция: **$A(t)=200^{t/24}$**. Через 72 часа $A(72)=200^3=$**8 000 000** компьютеров по этой неограниченной модели.

b) Для удвоения $a^T=2$, откуда **$T=\ln2/\ln a\approx3{,}1398$ часа**.

c) Слова «вдвое меньше» переводим в **$A(t_1)=B(t_1)/2$**. Получаем $a^{t_1}=210000\cdot1{,}08^{t_1}$. Делим обе части на положительную степень $1{,}08^{t_1}$: **$(a/1{,}08)^{t_1}=210000$**.

Логарифмируем обе части: **$t_1=\ln210000/\ln(a/1{,}08)\approx85{,}2203$ часа**. Проверяем именно отношение $A(t_1)/B(t_1)$: оно равно 1/2. Поскольку $a/1{,}08>1$, отношение растёт и достигает нужного значения один раз.

Все пункты используют функцию Alpha, найденную по начальным данным. Если на экзаменационном листе отдельно дана запасная формула **Ersatzangabe**, она заменяет эту функцию в соответствующей ветви решения; параметры двух разных функций нельзя смешивать.

15. После производных: скорость уменьшения 7 г в час

Задача. В 22:30 после пунша в организме находится 48 г алкоголя. В заданной экспоненциальной модели количество уменьшается вдвое за 4 часа, нового алкоголя не поступает. Через какое время мгновенная скорость уменьшения составит 7 г в час? Этот пункт решай после знакомства с производной.

При t в часах после 22:30 имеем $\mathbf{A(t)=48e^{\lambda t}}$, где $\boldsymbol{\lambda=\ln(1/2)/4\approx-0{,}1733}$ **ч⁻¹**. Производная показывает скорость изменения: $\mathbf{A'(t)=48\lambda e^{\lambda t}}$.

Количество уменьшается, поэтому производная отрицательна. Скорость уменьшения 7 г/ч задаёт $\mathbf{A'(t_2)=-7}$. Подставляем производную: $48\lambda e^{\lambda t_2}=-7$. Деление даёт $\mathbf{e^{\lambda t_2}=7/(-48\lambda)}$; правая часть положительна.

Берём ln и делим на λ: $\mathbf{t_2=\ln[7/(-48\lambda)]/\lambda\approx0{,}9954}$ **часа**. Это примерно 59 минут 43 секунды после 22:30, то есть **около 23:29:43**.

Проверка: $A'(t_2)=-7$ г/ч. В этот момент масса $\mathbf{A(t_2)=7/(-\lambda)\approx40{,}3955}$ **г**. Остаток в граммах и скорость его уменьшения в граммах за час отвечают на разные вопросы.