

Рост и распад: решения

18 подробных решений. Сравни ход вычислений со своей попыткой и проверь последний шаг.

Приближённые значения даны до четырёх знаков после запятой, если условие не требует другой точности. Точные значения сохраняются. В вычислениях используй неокруглённые числа.

Осваиваем отдельные действия

Задача 1

Eine Größe hat den Anfangswert 500 und wächst jährlich um 4%. Stellen Sie ein exponentielles Modell auf und berechnen Sie den Wert nach drei Jahren.

Начальное значение равно 500. Величина растёт на 4% в год. Запишите экспоненциальную модель и найдите значение через три года.

Решение

1. Годовой фактор $a=1+0,04=1,04$. Время t считаем в годах от начального момента.
2. $N(t)=500 \cdot 1,04^t$. Через три года $N(3)=500 \cdot 1,04^3=562,432$.
3. Ответ: через три года количество составит 562,432 единицы.

Проверка

Последовательно получаем 520; 540,8; 562,432. Прибавки увеличиваются, хотя процент постоянен.

Где легко ошибиться

$500+3 \cdot 20=560$ использует линейную прибавку от начальных 500. На второй год процент уже берётся от 520.

Задача 2

Eine Menge von 120 g nimmt stündlich um 15% ab. Geben Sie das Zerfallsgesetz an und berechnen Sie die Masse nach zwei Stunden.

Масса 120 г уменьшается на 15% за час. Запишите закон распада и найдите массу через два часа.

Решение

1. Остаётся 85%, значит $a=0,85$. При t в часах $m(t)=120 \cdot 0,85^t$; значения $m(t)$ измеряются в граммах.
2. $m(2)=120 \cdot 0,85^2=86,7$ г.

Проверка

После первого часа 102 г, после второго $102 \cdot 0,85=86,7$ г.

Где легко ошибиться

Фактор 0,15 оставляет только 15% и описывает уменьшение на 85%.

Задача 3

Für ein exponentielles Wachstum gilt $N(0)=100$ und $N(3)=172,8$; t wird in Tagen gemessen. Bestimmen Sie den täglichen Wachstumsfaktor und die tägliche prozentuelle Zunahme.

В экспоненциальной модели $N(0)=100$ и $N(3)=172,8$, время измеряется в днях. Найдите дневной фактор и процент роста за день.

Решение

1. $N(3)=100a^3=172,8$. Делим на 100: $a^3=1,728$. Положительный кубический корень даёт $a=\sqrt[3]{1,728}=1,2$.
2. $a=1,2$ соответствует 120% прежнего количества: 100% сохраняются и 20% добавляются. Дневной прирост $(1,2-1) \cdot 100\%=20\%$. Модель $N(t)=100 \cdot 1,2^t$.

Проверка

$1,2^3=1,728$, поэтому $N(3)=172,8$.

Где легко ошибиться

$72,8/3$ не даёт дневной процент: база начисления каждый день меняется.

Задача 4

Die Masse wird durch $m(t)=200 \cdot 0,93^t$ beschrieben; t in Wochen, m in Gramm. Um wie viel Prozent nimmt sie pro Woche ab? Wie viel ist nach drei Wochen vorhanden?

Модель массы $m(t)=200 \cdot 0,93^t$, t : недели, m : граммы. На сколько процентов масса уменьшается за неделю? Сколько останется через три недели?

Решение

1. За неделю остаётся 93%, поэтому уменьшение равно 7%.
2. $m(3)=200 \cdot 0,93^3=160,8714$ г.

Проверка

После первой недели масса 186 г. Через три недели она меньше 186 г, но больше $200-3 \cdot 14=158$ г: последующие потери меньше 14 г.

Где легко ошибиться

93%: доля остатка, а не процент уменьшения.

Задача 5

Die Halbwertszeit eines Stoffes beträgt 6 Jahre. Zu Beginn sind 96 g vorhanden. Wie viel bleibt nach 18 Jahren übrig? Geben Sie auch ein Modell an.

Период полураспада равен шести годам, начальная масса: 96 г. Сколько останется через 18 лет? Запишите модель.

Решение

1. $m(6)=96a^6=48$. Деление на 96 даёт $a^6=1/2$, поэтому $a=(1/2)^{1/6}$.
2. При t в годах $m(t)=96a^t$; масса измеряется в граммах. $m(18)=96a^{18}=12$. Останется 12 г.

Проверка

96 → 48 → 24 → 12: три деления, а не восемнадцать.

Где легко ошибиться

Нельзя использовать $0,5^t$, если t измеряется в годах: половина остаётся за шесть лет.

Задача 6

Gegeben ist $N(t)=N_0 \cdot e^{-0,12t}$, t in Stunden und $N_0>0$. Bestimmen Sie den stündlichen Zerfallsfaktor, die prozentuelle Abnahme pro Stunde und λ in der Schreibweise $N(t)=N_0 \cdot e^{\lambda t}$.

Дана модель $N(t)=N_0 \cdot e^{-0,12t}$, время в часах, $N_0>0$. Найдите часовой фактор, процент уменьшения за час и λ в записи $N(t)=N_0 \cdot e^{\lambda t}$.

Решение

1. $\lambda=-0,12 \text{ ч}^{-1}$, $a=e^{\lambda}=e^{-0,12} \approx 0,8869$.
2. За час остаётся примерно 88,6920%. Уменьшение $(1-a) \cdot 100\% \approx 11,3080\%$.
3. Отрицательное λ согласуется с распадом. Сам коэффициент λ не равен процентному уменьшению.

Проверка

За один час остаётся примерно 88,6920%. Эта доля вместе с уменьшением 11,3080% даёт 100%.

Где легко ошибиться

Постоянная 0,12 в экспоненте не равна годовому или часовому проценту 12%.

Выбираем и применяем формулу

Задача 7

Die Halbwertszeit beträgt 8 Tage. Welcher Anteil der Anfangsmenge ist nach 20 Tagen noch vorhanden? Geben Sie den Anteil als Dezimalzahl und in Prozent an.

Период полураспада равен восьми дням. Какая доля начального количества останется через 20 дней? Запишите её десятичной дробью и в процентах.

Решение

1. Из $a^8 = 1/2$ получаем дневной фактор $a = (1/2)^{1/8}$.
2. Доля $m(20)/m_0 = a^{20} \approx 0,1768$. В процентах останется примерно 17,6777%.

Проверка

20 дней находятся между двумя и тремя периодами, поэтому ответ между 25% и 12,5%.

Где легко ошибиться

Подстановка $a = 1/2$ в модель с t в днях означает полураспад каждый день. По условию половина остаётся через восемь дней.

Задача 8

$N(t) = 300 \cdot 0,9^t$, t in Tagen. Bestimmen Sie den ersten ganzzahligen Tag $t \geq 0$, an dem $N(t)$ kleiner als 100 ist.

$N(t) = 300 \cdot 0,9^t$, время в днях. Найдите первый целый день $t \geq 0$, когда $N(t)$ строго меньше 100.

Решение

1. Обозначим момент достижения 100 через t_1 . Тогда $N(t_1) = 300 \cdot 0,9^{t_1} = 100$.
2. После деления на 300 и логарифмирования $t_1 \cdot \ln 0,9 = \ln(1/3)$, поэтому $t_1 \approx 10,4272$.
3. Функция убывает, значит $N(t) < 100$ после этой границы. Первый целый день: 11.

Проверка

$N(10) \approx 104,6035$ ещё не подходит; $N(11) \approx 94,1432$ уже подходит.

Где легко ошибиться

Округление времени до ближайшего целого даёт 10 и нарушает исходное неравенство.

Задача 9

Der Ausschussanteil sinkt exponentiell innerhalb von zwei Monaten von 25% auf 16%. Bestimmen Sie den monatlichen Faktor, die relative Abnahme pro Monat und insgesamt sowie die gesamte Abnahme in Prozentpunkten.

Доля брака экспоненциально уменьшается с 25% до 16% за два месяца. Найдите месячный фактор, относительное уменьшение за месяц и за весь срок, а также уменьшение в процентных пунктах за весь срок.

Решение

1. $R(2)=25a^2=16$. Делим на 25: $a^2=0,64$. Положительный квадратный корень даёт $a=0,8$.
2. Относительное уменьшение за месяц: $100 \cdot (1-0,8)=20\%$. За два месяца: $100 \cdot (1-0,64)=36\%$.
3. Доля упала на $25-16=9$ процентных пунктов.

Проверка

$25 \cdot 0,8^2=16$. Разность 9 составляет 36% от исходных 25.

Где легко ошибиться

Девять процентных пунктов и девять процентов: разные изменения.

Задача 10

Bei exponentiellem Wachstum werden nach zwei Stunden 800 Einheiten und nach fünf Stunden 1562,5 Einheiten gemessen. Bestimmen Sie den stündlichen Faktor, den Anfangswert bei $t=0$ und den Wert bei $t=6$.

Через два часа измерено 800 единиц, через пять: 1562,5. Рост экспоненциальный. Найдите часовой фактор, значение при $t=0$ и значение при $t=6$.

Решение

1. $N(2)=N_0a^2=800$ и $N(5)=N_0a^5=1562,5$. Делим второе равенство на первое: $a^3=1562,5/800=1,953125$. Положительный кубический корень даёт $a=1,25$.
2. $N_0=800/1,25^2=512$. Модель $N(t)=512 \cdot 1,25^t$.
3. $N(6)=1562,5 \cdot 1,25=1953,125$.

Проверка

$512 \cdot 1,25^2=800$ и $512 \cdot 1,25^5=1562,5$. До $t=6$ от второго наблюдения остаётся один час.

Где легко ошибиться

800: значение через два часа, оно не является начальным для отсчёта $t=0$.

Задача 11

Um 22:30 Uhr sind 20 mg eines Stoffes vorhanden. Die Halbwertszeit beträgt 4 Stunden. Es kommt kein Stoff hinzu. a) Wie viel ist am nächsten Morgen um 06:30 Uhr vorhanden? b) Zu welcher Uhrzeit sind noch genau 3 mg vorhanden? Runden Sie die Uhrzeit auf die nächste Minute.

В 22:30 есть 20 мг вещества, период полураспада: четыре часа. Вещество больше не поступает. а) Сколько останется на следующее утро в 06:30? б) В какое время останется ровно 3 мг? Округлите время до ближайшей минуты.

Решение

1. Положим $t=0$ в 22:30. Из $m(4)=20a^4=10$ получаем $a=(1/2)^{1/4}$. Модель $m(t)=20a^t$, масса в мг, время в часах.
2. а) В 06:30 прошло восемь часов: $m(8)=20a^8=5$. Останется 5 мг.
3. б) Искомый момент t_1 удовлетворяет $m(t_1)=20a^{t_1}=3$. Поэтому $a^{t_1}=3/20$, $t_1 \cdot \ln a = \ln(3/20)$, $t_1 \approx 10,9479$ часа.
4. Это примерно 10 часов 56 минут 52 секунды после 22:30, то есть примерно 09:27 следующего дня.

Проверка

Между 8 и 12 часами масса уменьшается от 5 до 2,5 мг, поэтому 3 мг достигаются внутри этого промежутка.

Где легко ошибиться

0,9479 часа: не 94 минуты. Дробную часть часа умножают на 60.

Задача 12

Ein Bestand von anfangs 540 Einheiten verdoppelt sich alle 9 Monate. Bestimmen Sie den monatlichen Wachstumsfaktor und das Modell. Nach wie vielen Monaten erreicht der Bestand 1800 Einheiten? Geben Sie die Zeit auf zwei Dezimalstellen an.

Вначале есть 540 единиц, количество удваивается каждые девять месяцев. Найдите месячный фактор и модель. Через сколько месяцев количество достигнет 1800? Ответ дайте до сотых месяца.

Решение

1. $N(9)=540a^9=2 \cdot 540$. Поэтому $a^9=2$, $a=2^{1/9} \approx 1,0801$.
2. Модель $N(t)=540a^t$, t измеряется в месяцах.
3. $N(t_1)=540a^{t_1}=1800$. Делим на 540 и логарифмируем обе части: $t_1 \cdot \ln a = \ln(1800/540)$.
4. $t_1 = \ln(1800/540) / \ln a \approx 15,6327$ месяца. Ответ: примерно 15,63 месяца.

Проверка

$N(9)=1080$, $N(18)=2160$; 1800 достигается между этими моментами. Подстановка точного t_1 возвращает 1800.

Где легко ошибиться

Не нужно заменять точное время целым месяцем: задача просит длительность до сотых. Фактор сохраняйте в калькуляторе без раннего округления.

Собираем экзаменационное решение

Задача 13

Ein radioaktives Isotop hat eine Halbwertszeit von 12,26 Jahren. a) Berechnen Sie die Zerfallskonstante λ und geben Sie das zugehörige Zerfallsgesetz an. b) Wie viele Gramm sind nach 60 Jahren noch vorhanden, wenn es zu Beginn 66,2 g waren? c) Nach wie vielen Jahren sind nur noch 12,3% der ursprünglichen Menge vorhanden?

Период полураспада радиоактивного изотопа составляет 12,26 года. а) Найдите константу распада λ и закон распада. б) Сколько граммов останется через 60 лет, если вначале было 66,2 г? с) Через сколько лет останется 12,3% исходного количества?

Решение

- а) Время считаем в годах. Условие $N(12,26) = N_0 a^{12,26} = N_0/2$ даёт $a^{12,26} = 1/2$, значит $a = (1/2)^{1/12,26} \approx 0,9450$.
- $\lambda = \ln a = \ln(1/2)/12,26 \approx -0,0565$ год⁻¹. В принятой записи $N(t) = N_0 e^{\lambda t}$; для распада $\lambda < 0$.
- б) Для $N_0 = 66,2$ значения $N(t)$ измеряются в граммах. $N(60) = 66,2 a^{60} \approx 2,2265$. Ответ: останется примерно 2,2265 г.
- с) В искомый момент $N(t_1) = N_0 a^{t_1} = 0,123 N_0$. Сокращаем N_0 : $a^{t_1} = 0,123$.
- Логарифмируем: $t_1 \cdot \ln a = \ln 0,123$. Получаем $t_1 \approx 37,0653$ года.

Проверка

При $t = 12,26$ остаётся $N_0/2$. Подстановка точного t_1 возвращает $0,123 N_0$. До 60 лет проходит больше времени, поэтому остаток в б меньше 12,3% начального.

Где легко ошибиться

12,3% в с обозначают оставшуюся долю 0,123. Подстановка 0,877 решала бы вопрос о потере 12,3%.

Задача 14

Wenn ein Raucher heute mit dem Rauchen aufhört, beträgt sein Risiko, an Lungenkrebs zu erkranken, im gegebenen Modell etwa 40%. Nach weiteren zwei Jahren ohne Rauchen beträgt es 32%. a) Stellen Sie eine exponentielle Abnahmefunktion auf und bestimmen Sie die jährliche prozentuelle Veränderung. b) Wie groß ist das Risiko nach 25 Jahren ohne Rauchen? Nach welchem Zeitraum ist es auf 1% gesunken? Kann es nach diesem Modell auf 0% sinken?

В модели из условия риск сегодня составляет 40%, через два года без курения 32%. а) Составьте экспоненциальную функцию убывания и найдите ежегодное относительное изменение. б) Найдите значение через 25 лет, срок до 1% и объясните, может ли модель достичь 0%.

Решение

- а) Считаем значения $R(t)$ в процентах, t в годах после прекращения курения. $R(0)=40$, $R(2)=40a^2=32$.
- $a^2=0,8$, поэтому $a=\sqrt{0,8}\approx 0,8944$. Модель $R(t)=40a^t$.
- Ежегодное относительное уменьшение $(1-a)\cdot 100\%\approx 10,5573\%$. Для записи через e имеем $\lambda=\ln a\approx -0,1116$ год⁻¹.
- б) $R(25)=40a^{25}\approx 2,4586$. По модели через 25 лет значение составляет примерно 2,4586%.
- Для 1%: $R(t_1)=40a^{t_1}=1$. После деления на 40 и логарифмирования $t_1\cdot\ln a=\ln(1/40)$, откуда $t_1\approx 33,0628$ года.
- При любом конечном t фактор a^t положителен. Модель приближается к нулю, но не достигает его точно.

Проверка

$R(2)=32$. За два года доля уменьшилась на восемь процентных пунктов и на 20% относительно исходных 40. Порог 1% достигается позже 25 лет.

Где легко ошибиться

Разность 40–32 даёт процентные пункты за два года, а не годовой относительный процент. В модели с начальным значением 40 порог равен 1.

Задача 15

Die Bevölkerung eines Landes betrug vor acht Jahren 21 Millionen und hat jährlich um 3,2% zugenommen. a) Berechnen Sie die Wachstumskonstante und geben Sie die natürliche Exponentialfunktion an. b) Wie viele Einwohner hat das Land jetzt? c) Wie lange dauert es, bis sich die ursprüngliche Bevölkerung verdreifacht hat? d) Wie groß müsste der jährliche Zuwachs bei einem linearen Modell sein, damit die Bevölkerung im gleichen Zeitraum wie in c) von 21 auf 63 Millionen wächst?

Восемь лет назад население страны составляло 21 миллион и затем ежегодно увеличивалось на 3,2%. a) Найдите константу роста и естественную экспоненциальную функцию. b) Найдите население сегодня. c) Найдите срок утроения исходных 21 миллиона. d) Какой постоянный ежегодный прирост нужен линейной модели, чтобы за тот же срок вырасти с 21 до 63 миллионов?

Решение

1. a) Начало отсчёта находится восемь лет назад. Годовой фактор $a=1,032$, $\lambda=\ln 1,032 \approx 0,0315$ год⁻¹.
2. $N(t)=21e^{\lambda t}=21 \cdot 1,032^t$, значения $N(t)$ считаем в миллионах жителей.
3. b) Сегодня $t=8$. $N(8)=21 \cdot 1,032^8 \approx 27,0182$ миллиона жителей.
4. c) Утроение исходных 21 миллиона означает $N(T)=63$. Тогда $21 \cdot 1,032^T=63$, то есть $1,032^T=3$.
5. После логарифмирования $T \cdot \ln 1,032 = \ln 3$. Получаем $T \approx 34,8781$ года от начала. От сегодняшнего дня до этой отметки осталось $T-8 \approx 26,8781$ года.
6. d) Линейная модель имеет вид $L(t)=21+c \cdot t$. Условие $L(T)=63$ даёт $c=(63-21)/T \approx 1,2042$ миллиона жителей в год.

Проверка

$N(0)=L(0)=21$ и $N(T)=L(T)=63$. Значение $N(8)$ находится между 21 и 63; две модели не обязаны совпадать в промежуточные моменты.

Где легко ошибиться

Сегодня нельзя подставлять $t=0$, если $N_0=21$ относится к восьми годам назад. В d нужна постоянная прибавка в миллионах за год, а не процент.

Задача 16

Der Computer-Virus „Alpha“ verbreitet sich exponentiell. Ausgehend von einem infizierten Computer sind nach 24 Stunden 200 Computer infiziert. a) Geben Sie das Wachstumsgesetz an. Wie viele Computer sind nach 72 Stunden infiziert? b) In welchem Zeitraum verdoppelt sich die Anzahl? c) Gleichzeitig beschreibt $B(t)=420000 \cdot 1,08^t$ die Ausbreitung von „Beta“, t in Stunden. Nach wie vielen Stunden sind bei „Alpha“ halb so viele Computer infiziert wie bei „Beta“? Verwenden Sie für Alpha das Modell aus den Ausgangsdaten.

Вирус Alpha распространяется экспоненциально: сначала заражён один компьютер, через 24 часа 200. a) Найдите закон роста и число заражённых через 72 часа. b) Найдите период удвоения. c) Одновременно Beta описывается моделью $B(t)=420000 \cdot 1,08^t$, t в часах. Когда у Alpha будет вдвое меньше заражённых компьютеров, чем у Beta? Для Alpha используйте модель по основным данным.

Решение

1. a) Пусть $A(t)=a^t$, поскольку $A(0)=1$. Тогда $A(24)=a^{24}=200$, поэтому $a=200^{1/24} \approx 1,2470$.
2. Модель $A(t)=a^t=e^{\lambda t}$, $\lambda=\ln 200/24 \approx 0,2208$ ч⁻¹. $A(72)=(a^{24})^3=200^3=8\,000\,000$ в неограниченной модели условия.
3. b) $A(T)=2A(0)$ даёт $a^T=2$. После логарифмирования $T=\ln 2/\ln a \approx 3,1398$ часа.
4. c) Обозначим искомое время t_1 . Вдвое меньше означает $A(t_1)=B(t_1)/2$, поэтому $a^{t_1}=210000 \cdot 1,08^{t_1}$.
5. Делим на $1,08^{t_1}$: $(a/1,08)^{t_1}=210000$. Логарифмируем обе части: $t_1 \cdot \ln(a/1,08)=\ln 210000$.
6. Получаем $t_1 \approx 85,2203$ часа. Поскольку $a/1,08 > 1$, отношение $A(t)/B(t)$ строго растёт и достигает $1/2$ только один раз при $t \geq 0$.

Проверка

$a^{24}=200$. В найденный момент отношение $A(t_1)/B(t_1)=0,5$. Начальное отношение $1/420000$ гораздо меньше 0,5, поэтому найденное время должно быть положительным.

Где легко ошибиться

Вдвое меньше означает $A=B/2$. Равенство $A=B$ отвечало бы на другой вопрос: когда числа заражённых компьютеров сравняются.

Составные задачи с выбором этапа

Задача 17

Vor zehn Jahren betrug der Holzbestand eines Waldes 7000 m^3 . Ohne Schlägerung ist er inzwischen auf 9880 m^3 angewachsen. Es wird exponentielles Wachstum angenommen. a) Berechnen Sie das jährliche Wachstum in Prozent. b) Bestimmen Sie die Verdopplungszeit. c) In vier Jahren werden 4000 m^3 Holz geschlägert. Wann erreicht der Wald danach wieder den heutigen Holzbestand? Nehmen Sie an, dass der jährliche Wachstumsfaktor nach der Schlägerung unverändert bleibt.

Десять лет назад объём древесины составлял 7000 м^3 , сегодня без вырубki достиг 9880 м^3 . Рост экспоненциальный. а) Найдите годовой процент роста. б) Найдите период удвоения. с) Через четыре года вырубят 4000 м^3 . Когда после этого лес снова достигнет сегодняшнего объёма? Считайте, что годовой фактор после вырубki сохраняется.

Решение

- а) Из $7000a^{10}=9880$ получаем $a=(9880/7000)^{1/10}\approx 1,0351$. Годовой рост $(a-1)\cdot 100\%\approx 3,5061\%$.
- б) Удвоение требует $a^T=2$. После логарифмирования $T=\ln 2/\ln a\approx 20,1144$ года.
- с) Теперь $t=0$ обозначает сегодняшний день, $H(t)=9880a^t$, объём измеряется в м^3 . Перед вырубкой $H(4)=9880a^4\approx 11340,1946$.
- После вырубki $M_0=H(4)-4000\approx 7340,1946$. При s годах после вырубki $M(s)=M_0a^s$.
- Для возврата к сегодняшнему объёму $M(s_1)=9880$. Поэтому $a^{s_1}=9880/M_0$; после логарифмирования $s_1=\ln(9880/M_0)/\ln a\approx 8,6229$ года.
- Это примерно $8,6229$ года после вырубki, или $4+s_1\approx 12,6229$ года от сегодняшнего дня.

Проверка

$7000a^{10}=9880$. После вырубki остаётся положительное количество меньше 9880 . Подстановка точного s_1 в $M(s)$ возвращает 9880 .

Где легко ошибиться

Нельзя вычитать 4000 из сегодняшних 9880 : вырубka происходит через четыре года роста. Ответ s_1 отсчитывается от вырубki, а не от сегодня.

Задача 18

Bei einem Weihnachtsfest befinden sich um 22:30 Uhr insgesamt 48 g reiner Alkohol im Körper. Im gegebenen Modell wird der Alkohol mit einer biologischen Halbwertszeit von vier Stunden abgebaut. a) Berechnen Sie λ und stellen Sie $A(t)$ auf; t zählt Stunden nach 22:30 Uhr. b) Wie viel ist um 02:30 Uhr noch vorhanden? c) Zu welchem Zeitpunkt beträgt die momentane Abnahme 7 g pro Stunde? d) Um wie viel Uhr ist weniger als 12,5% der ursprünglichen Menge vorhanden?

В учебном условии в 22:30 в организме 48 г алкоголя. Модель задаёт период полураспада четыре часа. a) Найдите λ и функцию $A(t)$, где t обозначает часы после 22:30. b) Сколько останется в 02:30? c) Когда мгновенная скорость уменьшения составит 7 г в час? d) После какого времени останется меньше 12,5% исходного количества?

При первом прохождении реши a, b и d. Подпункт c требует производных и остаётся для позднего повторения.

Решение

1. a) Из $A(4)=48a^4=24$ получаем $a^4=1/2$, $a=(1/2)^{1/4}\approx 0,8409$.
2. $\lambda=\ln a=\ln(1/2)/4\approx -0,1733$ ч⁻¹. $A(t)=48a^t=48e^{\lambda t}$, количество измеряется в граммах.
3. b) В 02:30 следующего дня прошло четыре часа. $A(4)=24$, осталось 24 г.
4. d) Порог 12,5% от 48 равен 6. Для граничного момента $A(t_1)=48a^{t_1}=6$.
5. После деления и логарифмирования $t_1\cdot\ln a=\ln(6/48)$, поэтому $t_1=12$ часов. Это 10:30 следующего дня.
6. В 10:30 остаётся ровно 12,5%. Поскольку функция убывает, меньше 12,5% остаётся после 10:30, то есть при $t>12$.

c) Вернуться после производных

Производная $A'(t)=48\lambda e^{\lambda t}$ отрицательна. Скорость уменьшения 7 г/ч задаёт $A'(t_2)=-7$.

Получаем $48\lambda e^{\lambda t_2}=-7$, поэтому $e^{\lambda t_2}=7/(-48\lambda)$. Оба выражения внутри логарифма положительны.

$\lambda t_2=\ln(7/(-48\lambda))$, $t_2\approx 0,9954$ часа после 22:30. Это примерно 23:29:43 того же дня.

Подстановка возвращает $A'(t_2)=-7$. Количество в этот момент равно $7/(-\lambda)\approx 40,3955$ г, оно не равно 7 г.

Проверка

$A(0)=48$, $A(4)=24$, $A(8)=12$, $A(12)=6$. Время в d должно быть позднее 02:30, поскольку требуется меньше четверти от оставшегося там количества.

Где легко ошибиться

Мгновенное уменьшение на 7 г/ч в c не означает остаток 7 г. В d строгое меньше нельзя заменить равенством в граничный момент.