

Рост и распад: практика

18 задач. Сначала реши самостоятельно. Немецкое условие и русский перевод стоят рядом.

Округляй приближённые результаты до четырёх знаков после запятой, если условие не требует другой точности. Точные значения сохраняются. В вычислениях используй неокруглённые числа.

Осваиваем отдельные действия

Задача 1

Eine Größe hat den Anfangswert 500 und wächst jährlich um 4%. Stellen Sie ein exponentielles Modell auf und berechnen Sie den Wert nach drei Jahren.

Начальное значение равно 500. Величина растёт на 4% в год. Запишите экспоненциальную модель и найдите значение через три года.

Задача 2

Eine Menge von 120 g nimmt stündlich um 15% ab. Geben Sie das Zerfallsgesetz an und berechnen Sie die Masse nach zwei Stunden.

Масса 120 г уменьшается на 15% за час. Запишите закон распада и найдите массу через два часа.

Задача 3

Für ein exponentielles Wachstum gilt $N(0)=100$ und $N(3)=172,8$; t wird in Tagen gemessen. Bestimmen Sie den täglichen Wachstumsfaktor und die tägliche prozentuelle Zunahme.

В экспоненциальной модели $N(0)=100$ и $N(3)=172,8$, время измеряется в днях. Найдите дневной фактор и процент роста за день.

Задача 4

Die Masse wird durch $m(t)=200 \cdot 0,93^t$ beschrieben; t in Wochen, m in Gramm. Um wie viel Prozent nimmt sie pro Woche ab? Wie viel ist nach drei Wochen vorhanden?

Модель массы $m(t)=200 \cdot 0,93^t$, t : недели, m : граммы. На сколько процентов масса уменьшается за неделю? Сколько останется через три недели?

Задача 5

Die Halbwertszeit eines Stoffes beträgt 6 Jahre. Zu Beginn sind 96 g vorhanden. Wie viel bleibt nach 18 Jahren übrig? Geben Sie auch ein Modell an.

Период полураспада равен шести годам, начальная масса: 96 г. Сколько останется через 18 лет? Запишите модель.

Задача 6

Gegeben ist $N(t) = N_0 \cdot e^{-0,12t}$, t in Stunden und $N_0 > 0$. Bestimmen Sie den stündlichen Zerfallsfaktor, die prozentuelle Abnahme pro Stunde und λ in der Schreibweise $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$.

Дана модель $N(t) = N_0 \cdot e^{-0,12t}$, время в часах, $N_0 > 0$. Найдите часовой фактор, процент уменьшения за час и λ в записи $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$.

Выбираем и применяем формулу**Задача 7**

Die Halbwertszeit beträgt 8 Tage. Welcher Anteil der Anfangsmenge ist nach 20 Tagen noch vorhanden? Geben Sie den Anteil als Dezimalzahl und in Prozent an.

Период полураспада равен восьми дням. Какая доля начального количества останется через 20 дней? Запишите её десятичной дробью и в процентах.

Задача 8

$N(t) = 300 \cdot 0,9^t$, t in Tagen. Bestimmen Sie den ersten ganzzahligen Tag $t \geq 0$, an dem $N(t)$ kleiner als 100 ist.

$N(t) = 300 \cdot 0,9^t$, время в днях. Найдите первый целый день $t \geq 0$, когда $N(t)$ строго меньше 100.

Задача 9

Der Ausschussanteil sinkt exponentiell innerhalb von zwei Monaten von 25% auf 16%. Bestimmen Sie den monatlichen Faktor, die relative Abnahme pro Monat und insgesamt sowie die gesamte Abnahme in Prozentpunkten.

Доля брака экспоненциально уменьшается с 25% до 16% за два месяца. Найдите месячный фактор, относительное уменьшение за месяц и за весь срок, а также уменьшение в процентных пунктах за весь срок.

Задача 10

Bei exponentiellem Wachstum werden nach zwei Stunden 800 Einheiten und nach fünf Stunden 1562,5 Einheiten gemessen. Bestimmen Sie den stündlichen Faktor, den Anfangswert bei $t=0$ und den Wert bei $t=6$.

Через два часа измерено 800 единиц, через пять: 1562,5. Рост экспоненциальный. Найдите часовой фактор, значение при $t=0$ и значение при $t=6$.

Задача 11

Um 22:30 Uhr sind 20 mg eines Stoffes vorhanden. Die Halbwertszeit beträgt 4 Stunden. Es kommt kein Stoff hinzu. a) Wie viel ist am nächsten Morgen um 06:30 Uhr vorhanden? b) Zu welcher Uhrzeit sind noch genau 3 mg vorhanden? Runden Sie die Uhrzeit auf die nächste Minute.

В 22:30 есть 20 мг вещества, период полураспада: четыре часа. Вещество больше не поступает. а) Сколько останется на следующее утро в 06:30? б) В какое время останется ровно 3 мг? Округлите время до ближайшей минуты.

Задача 12

Ein Bestand von anfangs 540 Einheiten verdoppelt sich alle 9 Monate. Bestimmen Sie den monatlichen Wachstumsfaktor und das Modell. Nach wie vielen Monaten erreicht der Bestand 1800 Einheiten? Geben Sie die Zeit auf zwei Dezimalstellen an.

Вначале есть 540 единиц, количество удваивается каждые девять месяцев. Найдите месячный фактор и модель. Через сколько месяцев количество достигнет 1800? Ответ дайте до сотых месяца.

Собираем экзаменационное решение

Задача 13

Ein radioaktives Isotop hat eine Halbwertszeit von 12,26 Jahren. a) Berechnen Sie die Zerfallskonstante λ und geben Sie das zugehörige Zerfallsgesetz an. b) Wie viele Gramm sind nach 60 Jahren noch vorhanden, wenn es zu Beginn 66,2 g waren? c) Nach wie vielen Jahren sind nur noch 12,3% der ursprünglichen Menge vorhanden?

Период полураспада радиоактивного изотопа составляет 12,26 года. а) Найдите константу распада λ и закон распада. б) Сколько граммов останется через 60 лет, если вначале было 66,2 г? с) Через сколько лет останется 12,3% исходного количества?

Задача 14

Wenn ein Raucher heute mit dem Rauchen aufhört, beträgt sein Risiko, an Lungenkrebs zu erkranken, im gegebenen Modell etwa 40%. Nach weiteren zwei Jahren ohne Rauchen beträgt es 32%. a) Stellen Sie eine exponentielle Abnahmefunktion auf und bestimmen Sie die jährliche prozentuelle Veränderung. b) Wie groß ist das Risiko nach 25 Jahren ohne Rauchen? Nach welchem Zeitraum ist es auf 1% gesunken? Kann es nach diesem Modell auf 0% sinken?

В модели из условия риск сегодня составляет 40%, через два года без курения 32%. а) Составьте экспоненциальную функцию убывания и найдите ежегодное относительное изменение. б) Найдите значение через 25 лет, срок до 1% и объясните, может ли модель достичь 0%.

Задача 15

Die Bevölkerung eines Landes betrug vor acht Jahren 21 Millionen und hat jährlich um 3,2% zugenommen. a) Berechnen Sie die Wachstumskonstante und geben Sie die natürliche Exponentialfunktion an. b) Wie viele Einwohner hat das Land jetzt? c) Wie lange dauert es, bis sich die ursprüngliche Bevölkerung verdreifacht hat? d) Wie groß müsste der jährliche Zuwachs bei einem linearen Modell sein, damit die Bevölkerung im gleichen Zeitraum wie in c) von 21 auf 63 Millionen wächst?

Восемь лет назад население страны составляло 21 миллион и затем ежегодно увеличивалось на 3,2%. a) Найдите константу роста и естественную экспоненциальную функцию. b) Найдите население сегодня. c) Найдите срок утроения исходных 21 миллиона. d) Какой постоянный ежегодный прирост нужен линейной модели, чтобы за тот же срок вырасти с 21 до 63 миллионов?

Задача 16

Der Computer-Virus „Alpha“ verbreitet sich exponentiell. Ausgehend von einem infizierten Computer sind nach 24 Stunden 200 Computer infiziert. a) Geben Sie das Wachstumsgesetz an. Wie viele Computer sind nach 72 Stunden infiziert? b) In welchem Zeitraum verdoppelt sich die Anzahl? c) Gleichzeitig beschreibt $B(t) = 420000 \cdot 1,08^t$ die Ausbreitung von „Beta“, t in Stunden. Nach wie vielen Stunden sind bei „Alpha“ halb so viele Computer infiziert wie bei „Beta“? Verwenden Sie für Alpha das Modell aus den Ausgangsdaten.

Вирус Alpha распространяется экспоненциально: сначала заражён один компьютер, через 24 часа 200. a) Найдите закон роста и число заражённых через 72 часа. b) Найдите период удвоения. c) Одновременно Beta описывается моделью $B(t) = 420000 \cdot 1,08^t$, t в часах. Когда у Alpha будет вдвое меньше заражённых компьютеров, чем у Beta? Для Alpha используйте модель по основным данным.

Составные задачи с выбором этапа

Задача 17

Vor zehn Jahren betrug der Holzbestand eines Waldes 7000 m^3 . Ohne Schlägerung ist er inzwischen auf 9880 m^3 angewachsen. Es wird exponentielles Wachstum angenommen. a) Berechnen Sie das jährliche Wachstum in Prozent. b) Bestimmen Sie die Verdopplungszeit. c) In vier Jahren werden 4000 m^3 Holz geschlägert. Wann erreicht der Wald danach wieder den heutigen Holzbestand? Nehmen Sie an, dass der jährliche Wachstumsfaktor nach der Schlägerung unverändert bleibt.

Десять лет назад объём древесины составлял 7000 m^3 , сегодня без вырубki достиг 9880 m^3 . Рост экспоненциальный. a) Найдите годовой процент роста. b) Найдите период удвоения. c) Через четыре года вырубят 4000 m^3 . Когда после этого лес снова достигнет сегодняшнего объёма? Считайте, что годовой фактор после вырубki сохраняется.

Задача 18

Bei einem Weihnachtsfest befinden sich um 22:30 Uhr insgesamt 48 g reiner Alkohol im Körper. Im gegebenen Modell wird der Alkohol mit einer biologischen Halbwertszeit von vier Stunden abgebaut. a) Berechnen Sie λ und stellen Sie $A(t)$ auf; t zählt Stunden nach 22:30 Uhr. b) Wie viel ist um 02:30 Uhr noch vorhanden? c) Zu welchem Zeitpunkt beträgt die momentane Abnahme 7 g pro Stunde? d) Um wie viel Uhr ist weniger als 12,5% der ursprünglichen Menge vorhanden?

В учебном условии в 22:30 в организме 48 г алкоголя. Модель задаёт период полураспада четыре часа. a) Найдите λ и функцию $A(t)$, где t обозначает часы после 22:30. b) Сколько останется в 02:30? c) Когда мгновенная скорость уменьшения составит 7 г в час? d) После какого времени останется меньше 12,5% исходного количества?

При первом прохождении реши a, b и d. Подпункт c требует производных и остаётся для позднего повторения.