

Экстремальные задачи: строим модель: объяснение

demidmath.com · Telegram: @demidmath

В Kurvendiskussion функция уже дана. Здесь мы тоже ищем максимум или минимум, но сначала сами составляем функцию из условия задачи. Главная работа часто заканчивается ещё до вычисления производной: нужно увидеть, какие величины связаны рисунком.

Начинай с вопроса: что именно должно стать самым большим или самым маленьким? Затем выясни, что остаётся фиксированным. Например, у прямоугольника с периметром 20 м площадь $A=ab$ меняется, а $2a+2b=20$ связывает стороны. Из $b=10-a$ получаем $A(a)=a(10-a)$.

Hauptbedingung: какую величину оптимизируем

Слова maximal, größtmöglich, größter Flächeninhalt означают максимум. Minimal, möglichst wenig Material, kleinster Umfang означают минимум. Выпиши существительное рядом: Fläche, Volumen, Oberfläche, Kosten или Summe der Kanten. Оно определяет формулу цели.

Hauptbedingung (HB): например $A=ab \rightarrow \max$, $V=\pi r^2 h \rightarrow \max$, $O=2\pi r^2+2\pi r h \rightarrow \min$ или $K=c_1 l_1+c_2 l_2 \rightarrow \min$. Стрелка подписывает цель, а не является дополнительным уравнением.

Nebenbedingung (NB) выражает ограничение: известный периметр, заданный объём, длина ребра, принадлежность точки окружности или графику. Одно предложение может одновременно сообщать геометрическую связь и допустимое положение фигуры.

Не выбирай формулу по слову «цилиндр» без чтения цели. При заданном объёме можно минимизировать поверхность; при заданной поверхности можно максимизировать объём. HB и NB тогда меняются местами.

От двух размеров к одной переменной

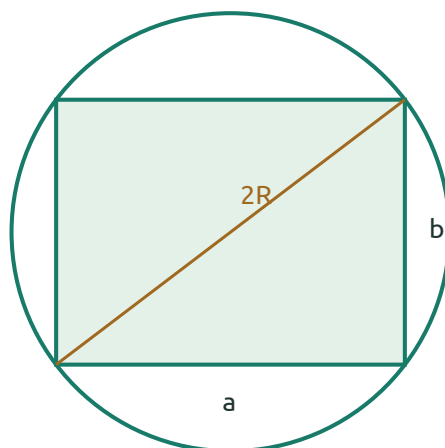
В нашем методе используются производные функции одной переменной. Поэтому из NB выражаем один размер через другой и подставляем в HB. Производные функций нескольких переменных существуют, но для этих задач они не нужны.

Для прямоугольника с периметром 20: HB $A=ab \rightarrow \max$; NB $2a+2b=20$; $b=10-a$; $A(a)=10a-a^2$. Геометрия требует $a>0$ и $b>0$, поэтому $0<a<10$.

$A'(a)=10-2a=0$ даёт $a=5$. $A''=-2<0$: это локальный максимум. Поскольку A' положительна на $(0;5)$ и отрицательна на $(5;10)$, это единственный глобальный максимум на допустимом интервале. Получаем $b=5$ м, $A=25$ м².

Выражай удобную величину. Если NB содержит $g^2+h^2=R^2$, а HB содержит $g^2 h$, выгоднее сразу подставить $g^2=R^2-h^2$. Извлекать корень и затем снова возводить его в квадрат не требуется.

Рисунок превращает условие в длины



$$a^2 + b^2 = 4R^2$$

$$A = ab$$

Полные стороны a, b . Диагональ вписанного прямоугольника равна $2R$.

На эскизе подпиши переменные и известные величины разными обозначениями. Покажи целый радиус или диаметр, полную высоту или её половину. Не обозначай одновременно буквой r радиус внешнего шара и радиус внутреннего цилиндра: используй R и r .

Для вписанного прямоугольника проведи диагональ: это диаметр окружности. Если a, b — полные стороны, NB имеет вид $a^2 + b^2 = (2R)^2$. Если x, y — половины сторон, связь уже $x^2 + y^2 = R^2$, а площадь $4xy$.

Для пространственного тела добавь отдельное сечение через ось или вершину и центр основания. Именно в плоском прямоугольном треугольнике ищем Пифагора или подобие.

Формулы: Formelsammlung, печатная с. 11 «Körper» (страница 13 файла) — призма, цилиндр, пирамида и конус. Формула закрытого цилиндра учитывает две круглые крышки. Для открытого сосуда нужно самостоятельно убрать одну. Формулы плоских фигур находятся перед этим разделом.

Почему одного уравнения $Z' = 0$ недостаточно

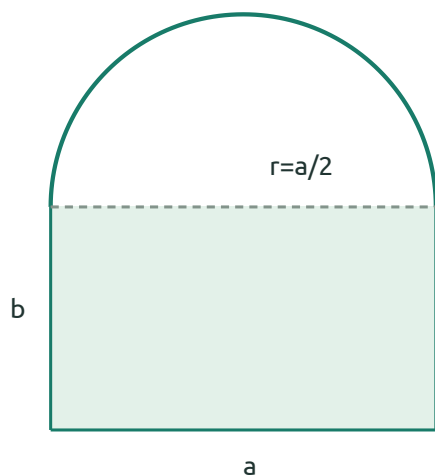
Внутренние точки, в которых $Z' = 0$, — кандидаты. Учитывай также точки, где производная не существует, но сама цель определена, и допустимые границы. На закрытом отрезке сравни значения всех кандидатов и концов.

Если интервал открыт, граничная фигура может быть вырожденной и не принадлежать задаче. Тогда вычисляй односторонние пределы и следи, достигается ли наилучшее значение. На неограниченной области максимум может вообще отсутствовать.

$Z''(x_0) < 0$ или > 0 доказывает локальный максимум или минимум. Для ответа «наибольший из всех допустимых» добавь знак производной на всём интервале, сравнение границ либо другое глобальное обоснование.

В конце вернись к исходным размерам, единицам и вопросу. Если просят диаметр, ответь $d = 2r$. Если просят отношение объёмов, не останавливайся на радиусе и высоте.

Составная фигура: считать только внешний контур



$$A = ab + \pi a^2 / 8$$

$$U = a + 2b + \pi a / 2$$

Считаем внешний контур

Внешний контур окна: $a + 2b + \pi a / 2$. Пунктирная общая сторона не входит в периметр.

Окно состоит из прямоугольника ширины a , высоты b и полукруга с диаметром a сверху. Площадь $A = ab + \pi a^2 / 8$. Внешний периметр $U = a + 2b + \pi a / 2$: общая сторона прямоугольника и полукруга находится внутри и в контур не входит.

При $A = 5 \text{ м}^2$ получаем $b = 5/a - \pi a / 8$ и $U(a) = 10/a + (1 + \pi/4)a$. Условия $a > 0, b > 0$ дают $0 < a < \sqrt{40/\pi}$.

$U' = -10/a^2 + 1 + \pi/4$. Отсюда $a^2 = 40/(4 + \pi)$, а $b = a/2$. Знак U' меняется с минуса на плюс ровно один раз: это глобальный минимум. Подстановка в исходную площадь подтверждает 5 м^2 .

Стоимость: Пифагор связывает длины, цены задают цель

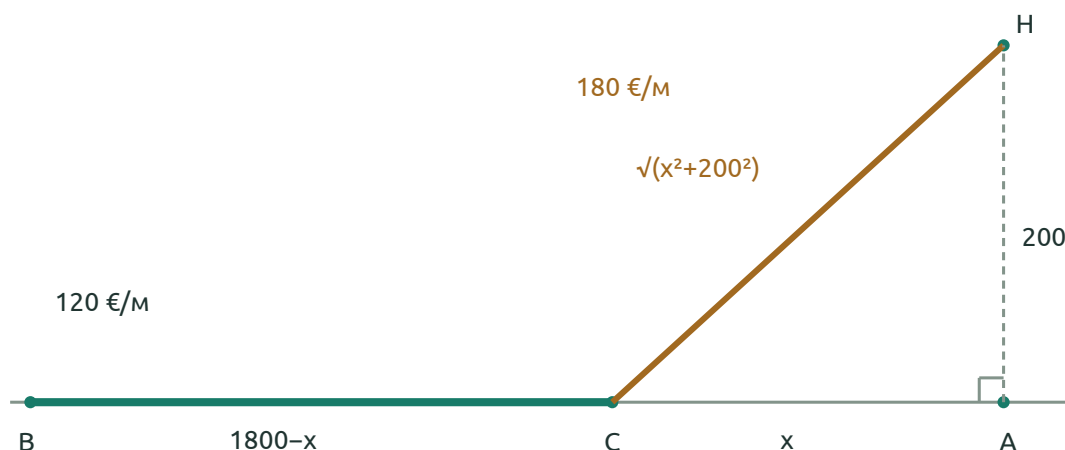


Схема не в масштабе: $x=AC$, $BC=1800-x$, $AH=200$. Путь CH — гипотенуза.

Если метр трубы вдоль дороги и по полю стоит по-разному, минимизируем стоимость, а не суммарную длину. Пусть A — ближайшая к дому точка дороги, B — источник, C — точка поворота с дороги, $x=AC$.

При $AB=1800$ м и расстоянии от дома до дороги 200 м имеем $BC=1800-x$ и $CH=\sqrt{x^2+200^2}$. Для C на отрезке AB допустимо $0 \leq x \leq 1800$.

НВ: $K=120 \cdot BC + 180 \cdot CH$. После подстановки $K(x)=120(1800-x)+180\sqrt{x^2+40000}$. Производная $K'=-120+180x/\sqrt{x^2+40000}$. Искомое равенство $x/\sqrt{x^2+40000}=2/3$ можно возвести в квадрат: обе стороны неотрицательны.

Получаем $5x^2=160000$, $x=80\sqrt{5}$. $K''=180 \cdot 40000/(x^2+40000)^{3/2} > 0$. Минимум лежит внутри отрезка; $K_{\min}=216000+12000\sqrt{5} \approx 242832,82$ €. Округляем в самом конце.

Если C разрешено выбирать на всей прямой дороги, введём ориентированную координату z : у A она равна 0, у B — 1800; положительное направление идёт от A к B . На отрезке AB координата z совпадает с прежней длиной $x=AC$, но за точкой A может быть отрицательной. Тогда $BC=|1800-z|$, $CH=\sqrt{z^2+40000}$, $K(z)=120|1800-z|+180\sqrt{z^2+40000}$, $z \in \mathbb{R}$.

При $z < 0$ производная $K'=-120+180z/\sqrt{z^2+40000} < 0$: движение к A уменьшает стоимость. При $z > 1800$ производная $K'=120+180z/\sqrt{z^2+40000} > 0$: движение дальше за B увеличивает стоимость. Значит минимум на всей прямой находится на $[0; 1800]$, где уже получено $z=x=80\sqrt{5}$ м.