

Экстремальные задачи: строим модель: разборы

demidmath.com · Telegram: [@demidmath](https://t.me/demidmath)

Сверяй решение после собственной попытки. Номера соответствуют отдельному листу условий. Подсказки и раскрываемые переводы доступны на странице практики.

Задача 1

Ein Rechteck hat den Umfang 20 m. Bestimmen Sie die Seiten für maximalen Flächeninhalt.

НВ: $A=ab \rightarrow \max$. НВ: $2a+2b=20$. Из НВ $b=10-a$, поэтому $A(a)=10a-a^2$, $0 < a < 10$.

$A'=10-2a=0 \Rightarrow a=5$. $A'>0$ до 5 и $A'<0$ после 5. Следовательно, это глобальный максимум; у вырожденных концов площадь стремится к 0.

$b=5$ м; $A_{\max}=25$ м².

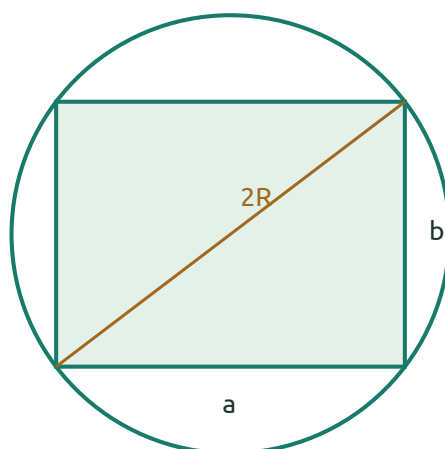
Проверка. $2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = 20$ м.

Где легко ошибиться. Не подставляй периметр вместо площади.

Повторить в конспекте: От двух размеров к одной переменной.

Задача 2

Einem Kreis mit Radius 4 cm wird ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt eingeschrieben. Berechnen Sie Seiten, Fläche und Umfang.



$$a^2 + b^2 = 4R^2$$

$$A = ab$$

Полные стороны a, b . Диагональ вписанного прямоугольника равна $2R$.

Пусть a, b — полные стороны. Диагональ равна 8. NB: $a^2 + b^2 = 64$. NB: $A = ab \rightarrow \max$.

$$b = \sqrt{64 - a^2}, A(a) = a\sqrt{64 - a^2}, 0 < a < 8. A' = (64 - 2a^2) / \sqrt{64 - a^2}.$$

$A' = 0 \Rightarrow a^2 = 32 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$. До этой точки $A' > 0$, после $A' < 0$; при обоих концах $A \rightarrow 0$.

$b = 4\sqrt{2}$ см, $A_{\max} = 32$ см², $U = 16\sqrt{2}$ см. Прямоугольник оказался квадратом в результате расчёта.

Проверка. $a^2 + b^2 = 32 + 32 = 64$.

Где легко ошибиться. Радиус 4, диагональ 8.

Повторить в конспекте: Рисунок превращает условие в длины.

Задача 3

Einem Kreis mit Radius 4 cm wird ein Rechteck mit größtem Umfang eingeschrieben. Berechnen Sie Fläche und Umfang.

NB сохраняется: $a^2 + b^2 = 64$. Теперь NB: $U = 2a + 2b \rightarrow \max$.

$$U(a) = 2a + 2\sqrt{64 - a^2}, 0 < a < 8. U' = 2 - 2a / \sqrt{64 - a^2} = 0 \Rightarrow \sqrt{64 - a^2} = a \Rightarrow a^2 = 32.$$

U' положительна до $a = 4\sqrt{2}$ и отрицательна после. У концов $U \rightarrow 16$, а внутри $U_{\max} = 16\sqrt{2} > 16$.

$a = b = 4\sqrt{2}$ см, $A = 32$ см². Совпадение оптимальной фигуры с задачей 2 не освобождает от записи другой цели.

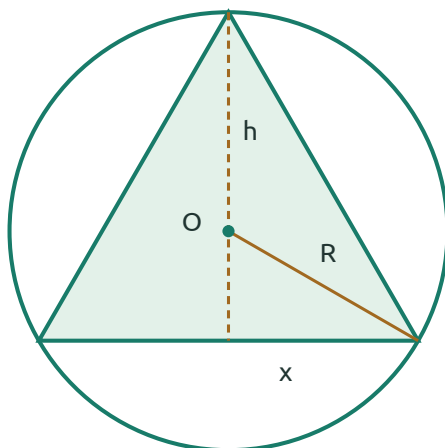
Проверка. Оптимальный периметр около 22,63 см больше граничного 16 см.

Где легко ошибиться. Максимум площади и максимум периметра не обязаны всегда совпадать.

Повторить в конспекте: Hauptbedingung: какую величину оптимизируем.

Задача 4

Einem Kreis mit Radius 4 cm wird ein gleichschenkliges Dreieck mit maximaler Fläche eingeschrieben. Berechnen Sie Fläche und Umfang.



$$x^2 + (h-R)^2 = R^2$$

$$A = xh$$

Половина основания x и высота h . В сечении $x^2 + (h-R)^2 = R^2$.

Разместим вершину в верхней точке окружности. Пусть h — полная высота до горизонтального основания, x — половина основания. Расстояние основания от центра с учётом знака равно $h-4$. NB: $x^2 + (h-4)^2 = 16$.

$x^2 = 8h - h^2$, NB $A = (2x)h/2 = h\sqrt{8h - h^2}$, $0 < h < 8$. Удобно максимизировать $A^2 = h^2(8h - h^2) = 8h^3 - h^4$: $A > 0$, поэтому квадрат строго сохраняет порядок.

$(A^2)' = 24h^2 - 4h^3 = 4h^2(6-h)$. Единственный внутренний максимум при $h=6$; на концах $A \rightarrow 0$.

$x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, основание $4\sqrt{3}$. Каждая боковая сторона $\sqrt{x^2 + h^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$: получился равносторонний треугольник.

$A_{\max} = 12\sqrt{3} \text{ см}^2$, $U = 12\sqrt{3} \text{ см}$. Числа совпали, единицы различаются.

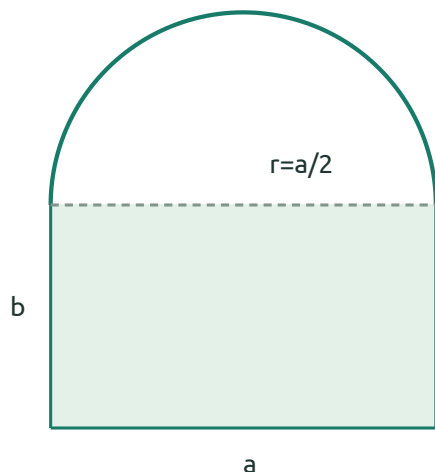
Проверка. Радиус описанной окружности равностороннего треугольника $a/\sqrt{3} = 4$.

Где легко ошибиться. Квадрат цели допустим здесь потому, что площадь неотрицательна; нельзя без проверки так преобразовывать любую цель.

Повторить в конспекте: Рисунок превращает условие в длины.

Задача 5

Auf ein Rechteck mit Breite a und Höhe b wird ein Halbkreis mit Durchmesser a gesetzt. Die Gesamtfläche beträgt 5 m^2 . Minimieren Sie den äußeren Umfang.



$$A = ab + \pi a^2 / 8$$

$$U = a + 2b + \pi a / 2$$

Считаем внешний контур

Внешний контур окна: $a + 2b + \pi a / 2$. Пунктирная общая сторона не входит в периметр.

НВ: $U = a + 2b + \pi a / 2 \rightarrow \min$. НВ: $ab + \pi a^2 / 8 = 5$. Общая горизонтальная граница фигур внутренняя.

$b = 5/a - \pi a / 8$. Поэтому $U(a) = 10/a + (1 + \pi/4)a$; допустимо $0 < a < \sqrt{40/\pi}$.

$U' = -10/a^2 + 1 + \pi/4 = 0 \Rightarrow a = \sqrt{40/(4 + \pi)}$. $U'' = 20/a^3 > 0$, и U' меняет знак с $-$ на $+$.

$b = a/2$. При $a \rightarrow 0+$ периметр неограничен; после найденного a он возрастает до другого края. Это глобальный минимум.

$a \approx 2,367 \text{ м}$; $b \approx 1,183 \text{ м}$; $U_{\min} = \sqrt{10(4 + \pi)} \approx 8,451 \text{ м}$.

Проверка. $ab + \pi a^2 / 8 = a^2(4 + \pi) / 8 = 5$.

Где легко ошибиться. Не учитывая диаметр полукруга второй раз.

Повторить в конспекте: Составная фигура: считать только внешний контур.

Задача 6

Ein Haus liegt 200 m neben einer geraden Straße. A ist der nächste Straßenpunkt, AB=1800 m bis zum Heizwerk B. Die Leitung kostet entlang der Straße 120 €/m, querfeldein 180 €/m. Wo soll sie bei C abzweigen? Bestimmen Sie die minimalen Kosten.

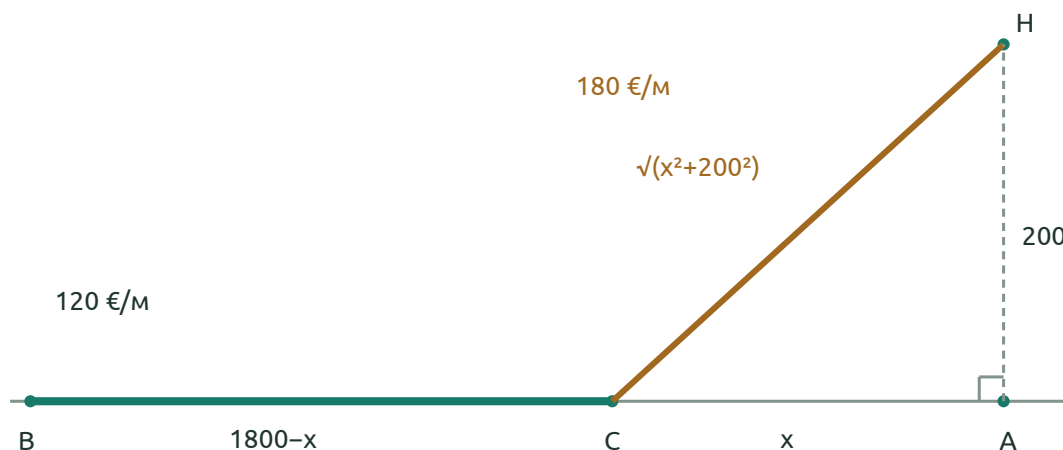


Схема не в масштабе: $x=AC$, $BC=1800-x$, $AH=200$. Путь CH — гипотенуза.

Выбираем $x=AC$, сначала $C \in AB$. NB: $BC=1800-x$, $CH=\sqrt{x^2+40000}$, $0 \leq x \leq 1800$.

NB: $K=120BC+180CH \rightarrow \min \Rightarrow K(x)=120(1800-x)+180\sqrt{x^2+40000}$.

$K'=-120+180x/\sqrt{x^2+40000}=0 \Rightarrow 3x=2\sqrt{x^2+40000}$. После возведения в квадрат $5x^2=160000$, $x=80\sqrt{5} \approx 178,89$ м.

$CH=120\sqrt{5} \approx 268,33$ м; $BC=1800-80\sqrt{5} \approx 1621,11$ м. $K''>0$ всюду, $K'(0)<0$ и $K'(1800)>0$: минимум глобальный.

$K_{\min}=216000+12000\sqrt{5} \approx 242832,82$ €. Для сравнения $K(0)=252000$ €, $K(1800) \approx 326000$ €. Число 242819,04 € в печатном ключе не соответствует данным 120/180/200/1800.

Для всей прямой используем координату z с $A=0$ и $B=1800$, а не неотрицательную длину AC . Тогда $K(z)=120|1800-z|+180\sqrt{z^2+40000}$. При $z<0$ имеем $K'<0$, при $z>1800$ — $K'>0$, поэтому внешние участки не дают меньшей стоимости. На $[0;1800]$ $z=x$; найденная точка $x=80\sqrt{5}$ м даёт глобальный минимум и на всей прямой.

Проверка. Неокруглённые длины дают $K_{\min}=216000+12000\sqrt{5}$.

Где легко ошибиться. x здесь AC , а не BC . Не округляй длины до подстановки в стоимость.

Повторить в конспекте: Стоимость: Пифагор связывает длины, цены задают цель.

Задача 7

Eine geschlossene zylindrische Dose und ein oben offener Topf haben dasselbe feste Volumen V_0 . Schreiben Sie jeweils NB, NB und eine Zielfunktion in r auf. Noch nicht ableiten.

В обоих случаях $NB \pi r^2 h = V_0 \Rightarrow h = V_0 / (\pi r^2)$, $r > 0$. Минимизируется площадь требуемого материала.

Закрытая банка: NB $O = 2\pi r^2 + 2\pi r h \rightarrow \min$; $O(r) = 2\pi r^2 + 2V_0/r$.

Открытый сосуд: NB $O = \pi r^2 + 2\pi r h \rightarrow \min$; $O(r) = \pi r^2 + 2V_0/r$. Отличается число оснований. Высота определяется одинаковой связью.

Проверка. Каждое слагаемое O имеет размерность площади.

Где легко ошибиться. «Мало материала» означает площадь при одинаковой толщине и стоимости материала.

Повторить в конспекте: Hauptbedingung: какую величину оптимизируем.

Задача 8

Ein Rechteck hat den Umfang 28 m. Bestimmen Sie die Seiten und den maximalen Flächeninhalt.

NB $A = xy \rightarrow \max$; NB $2x + 2y = 28 \Rightarrow y = 14 - x$. $A(x) = 14x - x^2$, $0 < x < 14$.

$A' = 14 - 2x = 0 \Rightarrow x = 7$. A' меняет знак с $+$ на $-$; у обоих концов $A \rightarrow 0$.

$y = 7$ м, $A_{\max} = 49$ м².

Проверка. $A = 49 - (x - 7)^2 \leq 49$.

Где легко ошибиться. Не путай периметр с суммой двух сторон.

Повторить в конспекте: От двух размеров к одной переменной.

Задача 9

Für drei Seiten eines rechteckigen Grundstücks stehen 40 m Zaun zur Verfügung. Die vierte Seite liegt an einer geraden Mauer und benötigt keinen Zaun. Bestimmen Sie die Seitenlängen und den maximalen Flächeninhalt.

Пусть x — каждая из двух сторон поперёк стены, y — сторона вдоль стены. NB $A = xy \rightarrow \max$; NB $2x + y = 40$.

$A(x) = x(40 - 2x)$, $0 < x < 20$. $A' = 40 - 4x = 0 \Rightarrow x = 10$. A' меняет знак с $+$ на $-$; на краях $A \rightarrow 0$.

$y = 20$ м, $A_{\max} = 200$ м².

Проверка. Длина ограды $2 \cdot 10 + 20 = 40$ м.

Где легко ошибиться. Четвёртая сторона не требует ограды.

Повторить в конспекте: Составная фигура: считать только внешний контур.

Задача 10

Bestimmen Sie globales Minimum und Maximum von $Z(x)=x^3-3x$ auf $[0;3]$.

Здесь целевая функция уже дана, NB — закрытый отрезок. $Z'=3x^2-3=0 \Rightarrow x=\pm 1$; только $x=1$ лежит внутри $[0;3]$.

Сравниваем $Z(0)=0$, $Z(1)=-2$, $Z(3)=18$.

Глобальный минимум -2 при $x=1$; максимум 18 при $x=3$. Максимум находится на границе, где производная не равна нулю.

Проверка. На $(0;1)$ Z убывает, на $(1;3)$ возрастает.

Где легко ошибиться. Это цель Z , а не геометрическая площадь: отрицательное значение допустимо.

Повторить в конспекте: Почему одного уравнения $Z'=0$ недостаточно.