

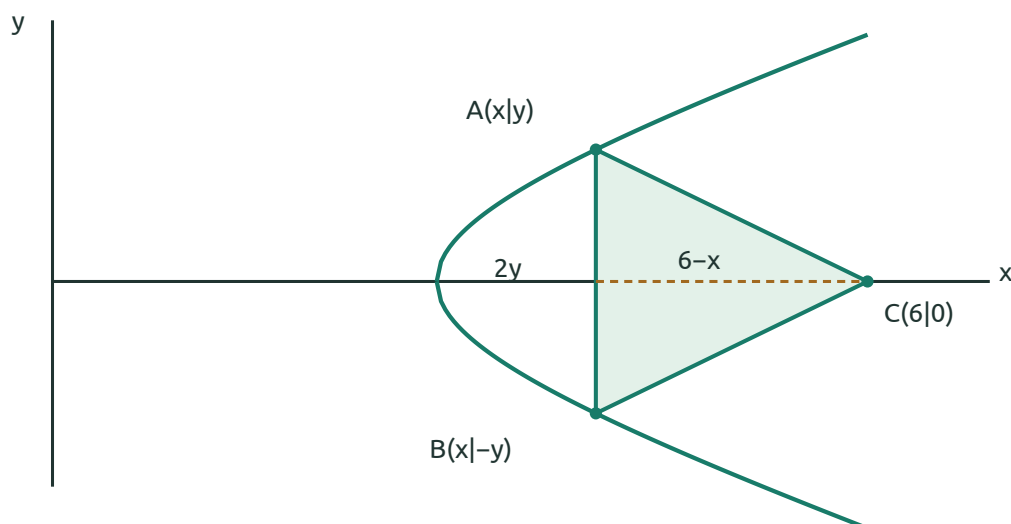
Экстремальные задачи: фигуры на графиках: объяснение

demidmath.com · Telegram: @demidmath

Координата точки и длина стороны — разные величины. Если левый конец отрезка имеет $x=1$, а правый $x=4$, его длина $4-1=3$. В этой теме сначала подписываем вершины, затем вычисляем основание и высоту.

Точка на графике записывается $P(u|f(u))$. Это сразу даёт связь между координатами. Но площадь может содержать u , $2u$, $6-u$ или разность двух абсцисс: нужный множитель определяет конструкция.

Вершины → длины → площадь



Вертикальное основание AB имеет длину $2y$, горизонтальная высота равна $6-x$.

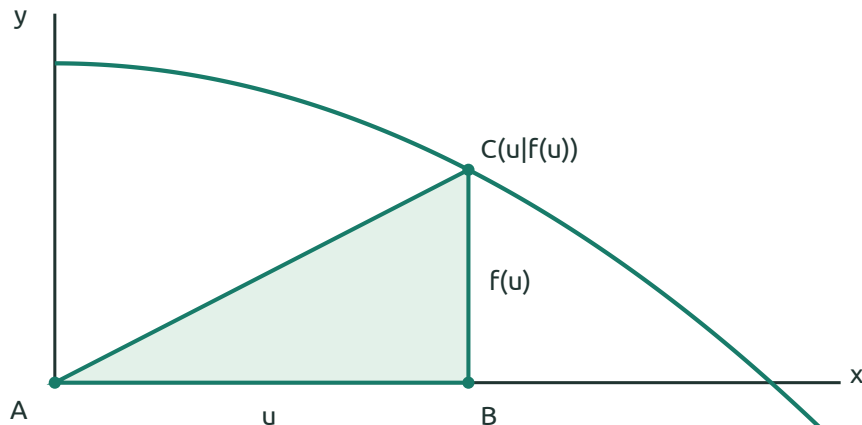
Горизонтальная длина между $(x_1|y)$ и $(x_2|y)$ равна $|x_2-x_1|$. Вертикальная длина равна $|y_2-y_1|$. Если порядок известен из рисунка, модуль можно заменить положительной разностью.

У прямоугольника с вершинами $(0|0), (u|0), (u|f(u)), (0|f(u))$ в первом квадранте $A=u \cdot f(u)$. У треугольника с первыми тремя вершинами $A=u \cdot f(u)/2$.

Если фигура симметрична относительно y -оси и верхние вершины $(-u|f(u)), (u|f(u))$, ширина $2u$. Если ось симметрии $x=2$, верхние абсциссы удобнее записать $2-t$ и $2+t$; ширина снова $2t$.

Для треугольника основание не обязано быть горизонтальным. При $A(u|v), B(u|-v), C(6|0)$ основание AB вертикально, его длина $2v$, перпендикулярная высота $6-u$.

Треугольник под параболой: область нужна до производной



Точка C выше оси x: основание u , высота $f(u)$, площадь $uf(u)/2$.

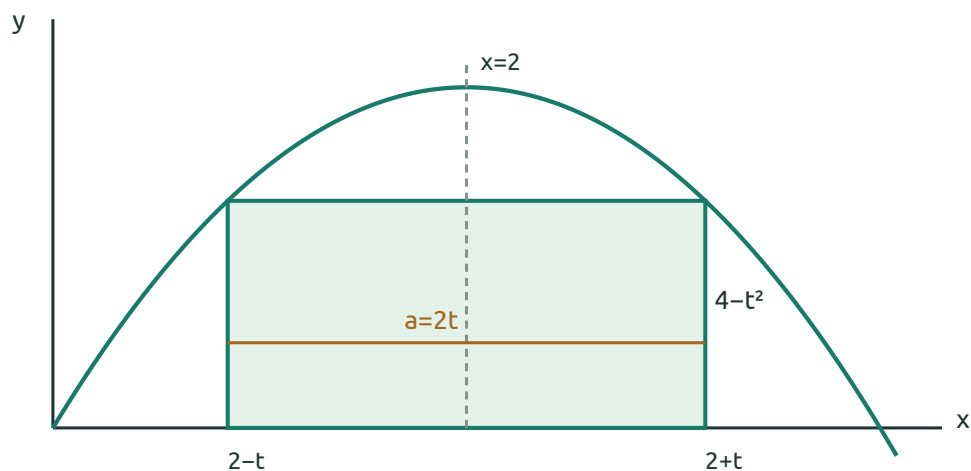
Дано $f(u) = -u^2/6 + 4,5$; $A(0|0)$, $B(u|0)$, $C(u|f(u))$. Чтобы C находилась выше оси x, нужны $u > 0$ и $f(u) > 0$. Нуль функции $u = 3\sqrt{3}$, поэтому $0 < u < 3\sqrt{3}$.

НВ $A = \text{основание} \cdot \text{высота} / 2 \rightarrow \max$. NB: высота $f(u)$. $A(u) = u(-u^2/6 + 4,5)/2 = -u^3/12 + 9u/4$.

$A' = -u^2/4 + 9/4 = 0 \Rightarrow u = 3$ (отрицательный корень вне области). $A'' = -u/2 < 0$ для $u > 0$. На обоих краях допустимого интервала $A \rightarrow 0$, значит максимум глобальный.

$C(3|3)$, $A_{\max} = 9/2$. Исходное фото указывает лишь $u > 0$. Если буквально разрешить C ниже оси x, геометрическая площадь равна $u|f(u)|/2$ и неограниченно растёт при $u \rightarrow \infty$. Поэтому ограничение «первый квадрант» добавлено явно; иначе глобального максимума нет.

Прямоугольник под параболой со смещённой осью



Ось симметрии $x=2$. Абсциссы верхних вершин $2-t$ и $2+t$.

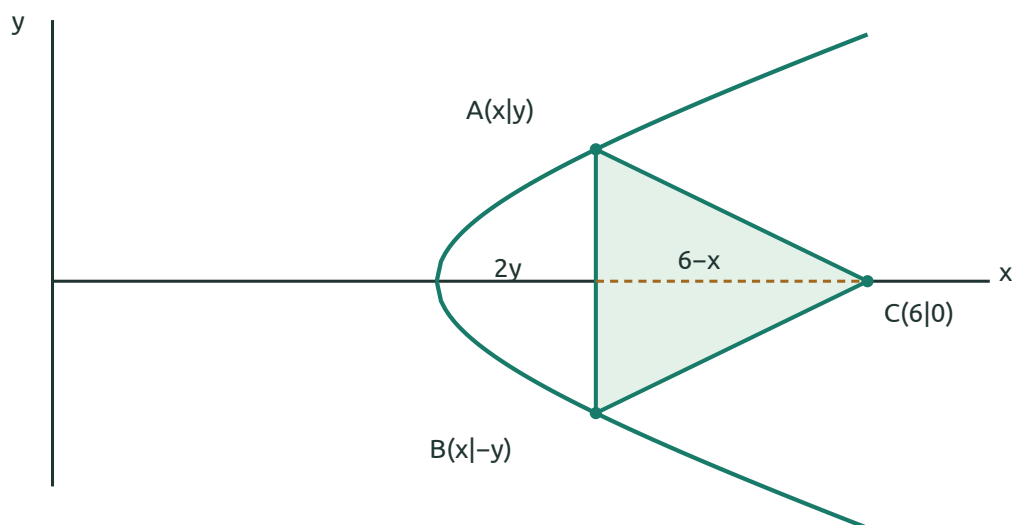
Для $y=4x-x^2$ удобно $y=4-(x-2)^2$. Ось симметрии $x=2$. Возьмём верхние вершины $(2-t|4-t^2)$ и $(2+t|4-t^2)$, $0 < t < 2$.

Ширина $a=(2+t)-(2-t)=2t$. Высота $b=4-t^2$. НВ $A=ab \rightarrow \max \Rightarrow A(t)=2t(4-t^2)=8t-2t^3$.

$A'=8-6t^2=0 \Rightarrow t=2/\sqrt{3}$. Поэтому $a=4/\sqrt{3}$, $b=8/3$, $A_{\max}=32/(3\sqrt{3})$. Знак производной + перед точкой и – после; на обоих концах $A \rightarrow 0$.

Если использовать левую абсциссу $u \in (0;2)$, правая равна $4-u$, ширина $4-2u$, высота $4u-u^2$. Это другая параметризация той же фигуры, а не другое решение.

Гипербола: вертикальное основание треугольника



Вертикальное основание AB имеет длину $2y$, горизонтальная высота равна $6-x$.

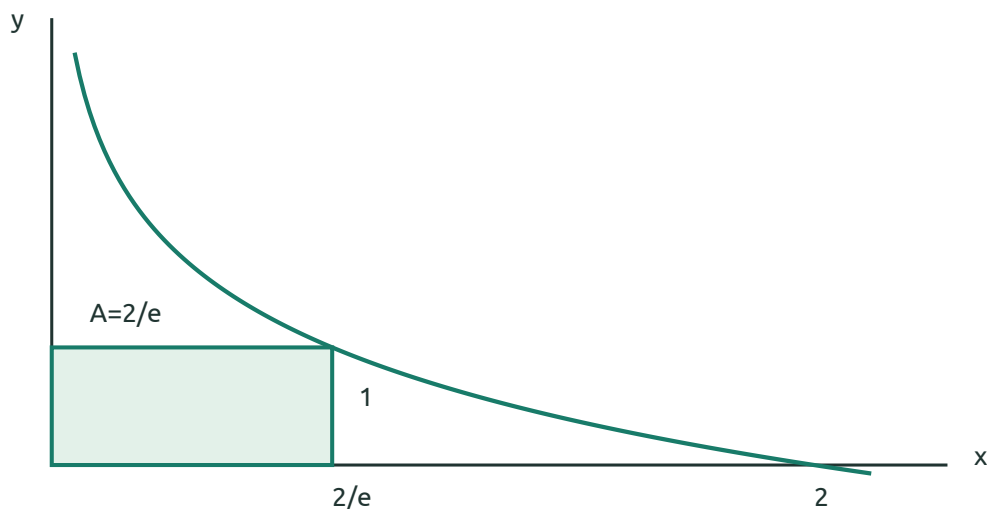
Из $x^2 - 4y^2 = 8$ получаем $y = \pm\sqrt{(x^2 - 8)}/2$. Реальные точки правой ветви начинаются с $x = \sqrt{8}$. Для невырожденного основания слева от $C(6|0)$: $\sqrt{8} < x < 6$.

$A(x|\sqrt{(x^2 - 8)}/2)$, $B(x|-\sqrt{(x^2 - 8)}/2)$. Поэтому $AB = \sqrt{(x^2 - 8)}$, высота из C равна $6-x$.

$S(x) = (6-x)\sqrt{(x^2 - 8)}/2$. Производная $S' = (-2x^2 + 6x + 8)/(2\sqrt{(x^2 - 8)})$. Числитель равен $-2(x-4)(x+1)$.

В допустимой области $x+1 > 0$, знаменатель положителен: до $x=4$ производная положительна, после отрицательна. Следовательно, $x=4$, $A(4|\sqrt{2})$, $B(4|-\sqrt{2})$, $S_{\max} = 2\sqrt{2}$.

Логарифмический график: предел на открытом краю



Площадь прямоугольника $x \cdot (-\ln(x/2))$; оптимальная высота равна 1.

Прямоугольник в первом квадранте имеет верхнюю правую вершину на $y = -\ln(x/2)$. Нуль при $x=2$, поэтому $0 < x < 2$. Площадь $A(x) = -x \ln(x/2)$.

По правилу произведения $A' = -\ln(x/2) - 1$. Из $A' = 0$ следует $\ln(x/2) = -1 \Rightarrow x = 2/e$. Высота равна 1.

$A'' = -1/x < 0$, а A' меняет знак с + на -. Поэтому $A_{\max} = 2/e$. Справа при $x \rightarrow 2^-$ площадь стремится к 0.

Слева высота неограниченно растёт, но ширина стремится к 0: $A = 2t e^{-(t)} \rightarrow 0$ при $t = -\ln(x/2) \rightarrow \infty$. Нельзя подставить $x=0$ в логарифм; используем предел. Бесконечная высота сама по себе не означает бесконечную площадь.

Сдвинутый круг и проверка составного условия

Уравнение $(x-p)^2 + (y-q)^2 = R^2$ задаёт центр $(p|q)$ и радиус R . Сдвиг центра не меняет максимальную площадь вписанного прямоугольника. Диагональ остаётся $2R$, оптимальная фигура — квадрат со стороной $R\sqrt{2}$.

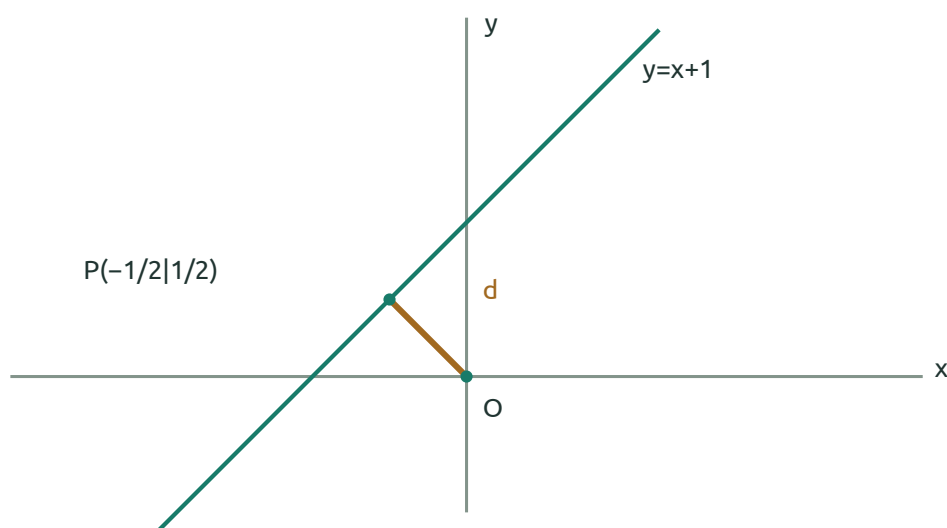
В составной задаче E07 функция $f(x) = 5x^3 + 7,5x^2$ имеет локальный максимум $H(-1|2,5)$: $f'(x) = 15x(x+1)$, $f''(-1) = -15 < 0$. Глобального максимума на R нет, поскольку $f(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. Прямая через H и начало координат: $g = -2,5x$; её отражение относительно оси y : $g^* = 2,5x$; касательная в H : $t = 2,5$.

Три вершины треугольника $(0|0), (-1|2,5), (1|2,5)$. По симметрии центр описанной окружности $U(0|q)$. Равенство расстояний даёт $q^2 = 1 + (2,5 - q)^2 \Rightarrow q = 1,45$. Радиус $R = 1,45$.

Напечатанные Ersatzangaben отражают треугольник вниз: $t = -2,5$ и круг $x^2 + (y+1,45)^2 = 1,45^2$. Это не совпадает с данными исходной функции. Однако радиус тот же, поэтому ответ оптимизации размеров совпадает: $a = b = 1,45\sqrt{2}$.

Здесь используем часть е как отдельную экстремальную задачу с данным кругом. Части на интегрирование относятся к следующему разделу курса.

Ближайшая точка: квадрат расстояния как цель



Ближайшая точка P лежит у основания перпендикуляра из O к прямой $y = x + 1$.

Если $P(x|x+1)$ лежит на прямой $y = x + 1$, расстояние до начала координат $d = \sqrt{x^2 + (x+1)^2}$. Допустимо любое действительное x : это координата, не длина.

Поскольку квадратный корень строго возрастает на неотрицательных числах, минимум d достигается там же, где минимум $D = d^2 = 2x^2 + 2x + 1$. $D' = 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1/2$, $P(-1/2 | 1/2)$.

$D = 2(x + 1/2)^2 + 1/2 \geq 1/2$ даёт глобальное обоснование. Ответ на вопрос о расстоянии $d_{\min} = 1/\sqrt{2}$, а не $D_{\min} = 1/2$.