

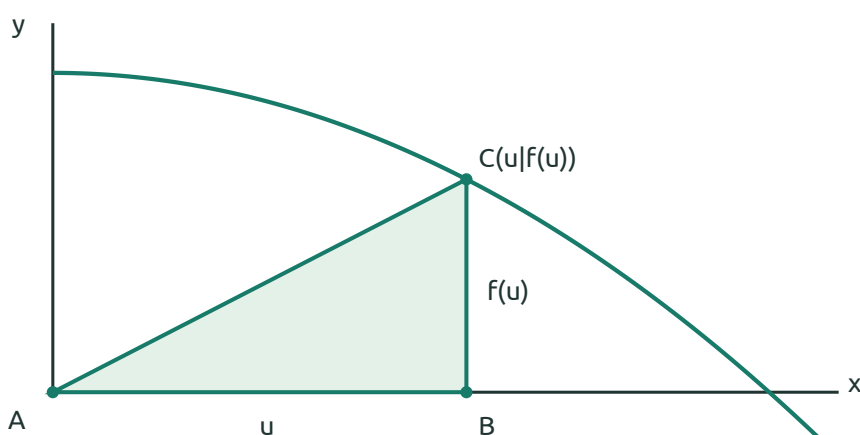
Экстремальные задачи: фигуры на графиках: разборы

demidmath.com · Telegram: @demidmath

Сверяй решение после собственной попытки. Номера соответствуют отдельному листу условий. Подсказки и раскрываемые переводы доступны на странице практики.

Задача 1

Für $f(u) = -u^2/6 + 4,5$ seien $A(0|0)$, $B(u|0)$, $C(u|f(u))$ gegeben. C soll im ersten Quadranten liegen. Maximieren Sie die Dreiecksfläche und bestimmen Sie C .



Точка C выше оси x : основание u , высота $f(u)$, площадь $uf(u)/2$.

НВ $S = uv/2 \rightarrow \max$. НВ $v = f(u) = -u^2/6 + 4,5$. Из $u > 0, v > 0$ получаем $0 < u < 3\sqrt{3}$.

$S(u) = -u^3/12 + 9u/4$. $S' = (9 - u^2)/4 = 0 \Rightarrow u = 3$. Вторая возможность -3 вне области.

$S' > 0$ до 3 и $S' < 0$ после; при обоих краях $S \rightarrow 0$. $v = f(3) = 3$.

$C(3|3)$; $S_{\max} = 9/2$. Длины основания и высоты равны 3.

Проверка. $3 \cdot 3/2 = 4,5$; точка C лежит на графике.

Где легко ошибиться. Не используйте $f'(u)$ как высоту: высота — $f(u)$.

Повторить в конспекте: Треугольник под параболой: область нужна до производной.

Задача 2

Untersuchen Sie dieselbe Dreiecksaufgabe nur unter der Bedingung $u > 0$, ohne Einschränkung auf den ersten Quadranten. Gibt es einen größten geometrischen Flächeninhalt?

Высота как длина равна $|f(u)|$. Поэтому $S(u) = u|-u^2/6 + 4,5|/2$.

При $u > 3\sqrt{3}$ функция отрицательна и $S(u) = u^3/12 - 9u/4$. Эта величина стремится к $+\infty$ при $u \rightarrow \infty$.

Глобального максимума нет. Значение $u=3$ оптимально только в ограниченной вышеосевой части конструкции.

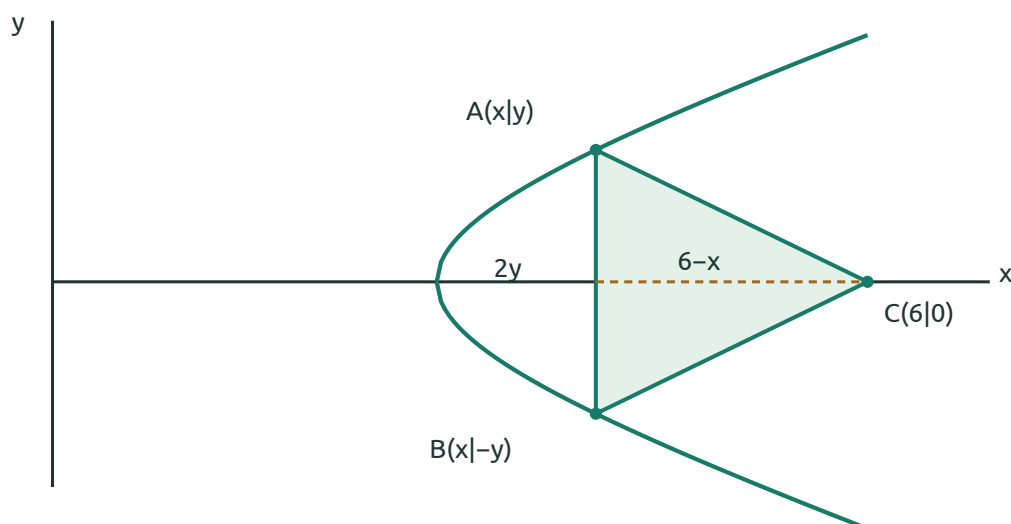
Проверка. При $u=12$ получаем $S=117$, что уже больше 4,5.

Где легко ошибиться. Отрицательная ордината не означает отрицательную геометрическую площадь.

Повторить в конспекте: Треугольник под параболой: область нужна до производной.

Задача 3

Die Punkte $A(x|y)$ und $B(x|-y)$ liegen auf dem rechten Ast der Hyperbel $x^2 - 4y^2 = 8$ mit $y > 0$ und $0 < x < 6$. Zusammen mit $C(6|0)$ bilden sie ein gleichschenkliges Dreieck. Bestimmen Sie die Lage von A und B für den größtmöglichen Flächeninhalt.



Вертикальное основание AB имеет длину $2y$, горизонтальная высота равна $6-x$.

Пусть $A(x|y), B(x|-y), y > 0$. NB $y = \sqrt{(x^2-8)}/2$. Для невырожденного треугольника $\sqrt{8} < x < 6$.

Основание $2y$, высота $6-x$. NB $S = (2y)(6-x)/2 = y(6-x) \rightarrow \max$.

$S = (6-x)\sqrt{(x^2-8)}/2$; $S' = (-2x^2 + 6x + 8)/(2\sqrt{(x^2-8)})$. Кандидаты $x=4$ и $x=-1$; допустим только 4.

Числитель $-2(x-4)(x+1)$ меняет знак с + на - на области. При $x \rightarrow \sqrt{8}+$ и $x \rightarrow 6-$ площадь стремится к 0.

$A(4|\sqrt{2}), B(4|-\sqrt{2})$, основание $2\sqrt{2}$, высота 2, $S_{\max} = 2\sqrt{2}$.

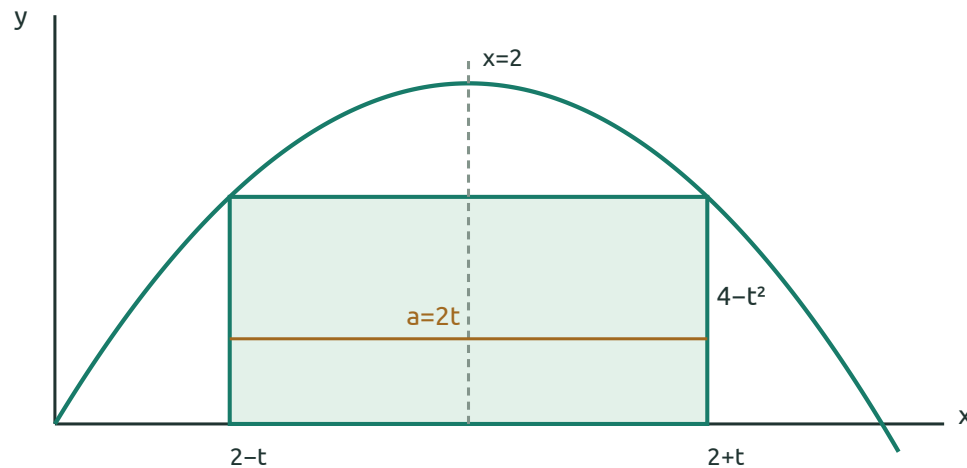
Проверка. $4^2 - 4(\sqrt{2})^2 = 8$.

Где легко ошибиться. Высота здесь $6-x$, а не x .

Повторить в конспекте: Гипербола: вертикальное основание треугольника.

Задача 4

Unter $y=4x-x^2$ im ersten Quadranten liegt ein Rechteck mit einer Seite auf der x-Achse, symmetrisch zu $x=2$. Zwei Ecken liegen auf dem Graphen. Bestimmen Sie die Seiten für maximale Fläche.



Ось симметрии $x=2$. Абсциссы верхних вершин $2-t$ и $2+t$.

Верхние вершины $(2-t|4-t^2), (2+t|4-t^2)$, $0 < t < 2$. Ширина $2t$, высота $4-t^2$.

НВ $A=ab \rightarrow \max$; НВ $a=2t, b=4-t^2$. $A(t)=8t-2t^3$; $A'=8-6t^2=0 \Rightarrow t=2/\sqrt{3}$.

A' меняет знак с $+$ на $-$; в обоих предельных положениях $A \rightarrow 0$. Значит $a=4/\sqrt{3}$, $b=8/3$.

$A_{\max}=32/(3\sqrt{3})$. Абсциссы верхних вершин $2 \pm 2/\sqrt{3}$.

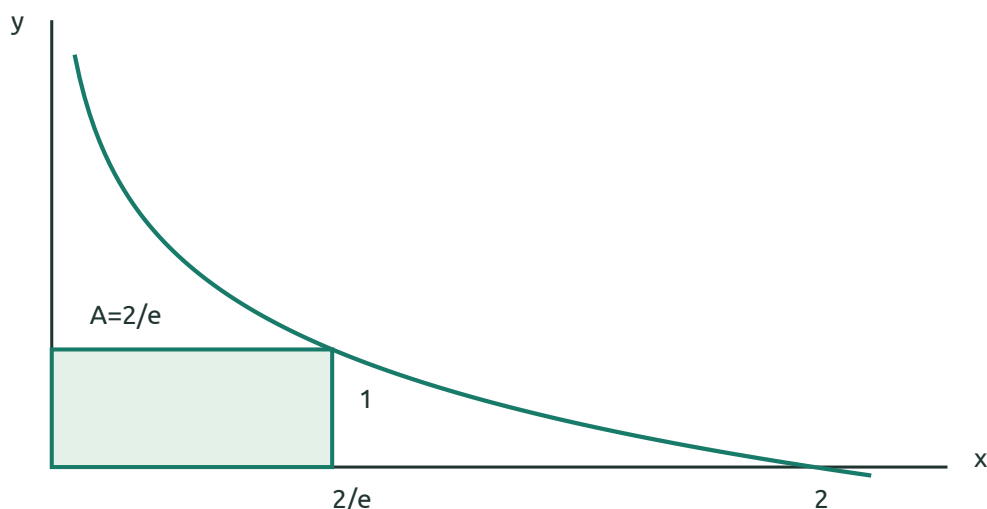
Проверка. $4-(2/\sqrt{3})^2=8/3$.

Где легко ошибиться. Абсцисса правой точки $2+t$ не равна ширине $2t$.

Повторить в конспекте: Прямоугольник под параболой со смещённой осью.

Задача 5

Zwei Seiten eines Rechtecks liegen auf den Koordinatenachsen, eine Ecke liegt auf $f(x)=-\ln(x/2)$, $0 < x < 2$. Bestimmen Sie den größten Flächeninhalt und begründen Sie das Maximum.



Площадь прямоугольника $x \cdot (-\ln(x/2))$; оптимальная высота равна 1.

НВ $A = xy \rightarrow \max$; НВ $y = -\ln(x/2)$. $A(x) = -x \ln(x/2)$, $0 < x < 2$.

$A' = -\ln(x/2) - 1 = 0 \Rightarrow \ln(x/2) = -1 \Rightarrow x = 2/e$. $y = 1$.

$A'' = -1/x < 0$; более того, $A' > 0$ слева от $2/e$ и < 0 справа. Это глобальный максимум.

На правом краю $A \rightarrow 0$; на левом $A = 2te^{-(t)} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. $A_{\max} = 2/e \approx 0,736$; стороны $2/e$ и 1.

Проверка. $f(2/e) = -\ln(1/e) = 1$.

Где легко ошибиться. В производной произведения появляется дополнительное -1 .

Повторить в конспекте: Логарифмический график: предел на открытом краю.

Задача 6

Im Kreis $x^2 + (y+1,45)^2 = 1,45^2$ soll ein Rechteck größter Fläche liegen. Bestimmen Sie seine Seiten und geben Sie eine mögliche Lage der Ecken an.

Центр $U(0|-1,45)$, радиус $R=1,45$. Для полных сторон a, b : НВ $a^2 + b^2 = (2R)^2 = 8,41$. НВ $A = ab \rightarrow \max$.

$A(a) = a\sqrt{8,41 - a^2}$, $0 < a < 2,9$. $A' = (8,41 - 2a^2)/\sqrt{8,41 - a^2} = 0 \Rightarrow a^2 = 8,41/2$.

Знак производной $+$ до точки и $-$ после, на краях $A \rightarrow 0$. Поэтому $a = b = 29\sqrt{2}/20 \approx 2,051$, $A_{\max} = 841/200 = 4,205$.

Для сторон параллельных осям вершины $(\pm 29\sqrt{2}/40 \mid -29/20 \pm 29\sqrt{2}/40)$, все четыре сочетания знаков. Поворот квадрата вокруг U также даёт оптимум.

Проверка. Квадрат расстояния каждой вершины до U равен $2(29\sqrt{2}/40)^2 = (29/20)^2$.

Где легко ошибиться. Знак $+$ внутри $(y+1,45)$ означает отрицательную ординату центра.

Повторить в конспекте: Сдвинутый круг и проверка составного условия.

Задача 7

Die linken und rechten oberen Ecken eines Rechtecks unter $y=4x-x^2$ haben die Abszissen u und $4-u$, $0 < u < 2$. Stellen Sie $A(u)$ auf und vergleichen Sie mit der Halbbreite t .

Ширина $a=(4-u)-u=4-2u$. Высота $b=4u-u^2$. Поэтому $A(u)=(4-2u)(4u-u^2)$.

$t=2-u$. Подстановка $u=2-t$ даёт $A=2t(4-t^2)$, как в задаче 4.

Если продолжить: $A'(u)=16-24u+6u^2=0 \Rightarrow u=2 \pm 2/\sqrt{3}$. На $(0;2)$ допустимо $u=2-2/\sqrt{3}$. Другой корень относится к другой ветви параметризации и не входит в область.

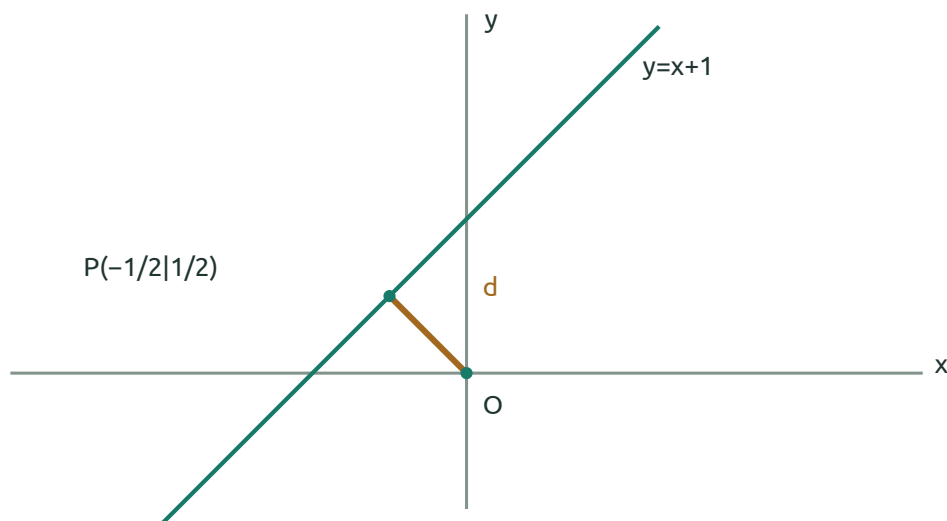
Проверка. $a=4-2(2-2/\sqrt{3})=4/\sqrt{3}$.

Где легко ошибиться. Один и тот же прямоугольник допускает разные переменные; их области различаются.

Повторить в конспекте: Прямоугольник под параболой со смещённой осью.

Задача 8

Bestimmen Sie den Punkt der Geraden $y=x+1$ mit dem kleinsten Abstand zum Koordinatenursprung.



Ближайшая точка P лежит у основания перпендикуляра из O к прямой $y=x+1$.

NB $P(x|x+1)$, $x \in \mathbb{R}$. NB $d=\sqrt{(x^2+(x+1)^2)} \rightarrow \min$. Равносильная цель $D=d^2=2x^2+2x+1$.

$D'=4x+2=0 \Rightarrow x=-1/2$, $y=1/2$. $D=2(x+1/2)^2+1/2$ имеет единственный глобальный минимум $1/2$.

$P(-1/2 | 1/2)$, $d_{\min}=\sqrt{1/2}=1/\sqrt{2}$.

Проверка. Радиус-вектор $(-1/2; 1/2)$ перпендикулярен направлению прямой $(1;1)$.

Где легко ошибиться. Отрицательная абсцисса допустима. В конце извлеки корень из D .

Повторить в конспекте: Ближайшая точка: квадрат расстояния как цель.