

Parallelogramm 3D

Разбор самостоятельных задач

Открывайте после собственной попытки. Номера соответствуют листу самостоятельных задач и этому же уроку курса.

Учебная формулировка архивной задачи и дополнительная аналогичная задача.

Основная задача

Gegeben sind $A(-3|-2|5)$, $B(1|-2|3)$, $C(9|6|7)$ und $D(5|6|9)$. a) Zeigen Sie, dass ABCD ein nicht entartetes Parallelogramm ist. Bestimmen Sie seine Ebene und den Schnittpunkt der z-Achse mit dem Parallelogramm selbst. b) Durch C verlaufen die Gerade g parallel zur z-Achse und die Gerade h senkrecht zur Ebene des Parallelogramms. Berechnen Sie den kleineren Winkel zwischen g und h.

Перевод: $A(-3|-2|5)$, $B(1|-2|3)$, $C(9|6|7)$, $D(5|6|9)$. а) Докажите, что ABCD — невырожденный параллелограмм, найдите его плоскость и пересечение самого параллелограмма с осью z. б) Через C проходят g параллельно z и h перпендикулярно плоскости фигуры. Найдите меньший угол между g и h.

Вычисляя разности координат, получаем $AB=DC=(4,0,-2)$ и $AD=BC=(8,8,4)$. Противоположные стороны попарно равны как векторы, а направления AB и AD независимы, поэтому фигура — невырожденный параллелограмм.

Векторное произведение $AB \times AD = (16, -32, 32)$ можно сократить до нормали $n=(1, -2, 2)$.

Подстановка A даёт плоскость $x-2y+2z=11$. На оси z координаты x и y равны нулю, значит точка пересечения плоскости с осью $P=(0|0|11/2)$.

Теперь проверим саму фигуру. Из $P=A+sAB+tAD$ находим $t=1/4$ и $s=1/4$. Оба параметра лежат от 0 до 1, поэтому P действительно внутри параллелограмма.

У прямой g направление $(0,0,1)$, а у h — нормаль n. Для меньшего угла берём модуль скалярного произведения и делим на длины: $\cos\varphi=2/3$. Следовательно, $\varphi \approx 48,19^\circ$.

Проверка: Сверьте контрольные точки в уроке.

Аналогичная задача

$A(-1|-1|1)$, $B(3|-1|1)$, $D(-1|3|3)$, $C(3|3|3)$. Найдите плоскость параллелограмма, его пересечение с осью z и меньший угол оси z с нормалью.

Подходит $n=(0,-1,2)$. Плоскость $-y+2z=3$; $P=(0|0|3/2)$. Из параметров $s=t=1/4$ следует принадлежность фигуре. $\cos\varphi=2/\sqrt{5}$, $\varphi \approx 26,57^\circ$.

Проверка: $n \cdot AB = n \cdot AD = 0$; восстановление даёт $z=1+2/4=3/2$.

Если ответ не совпал: Если угол равен $63,43^\circ$, проверьте, что спрашивается угол с нормалью.