

# Cosinus & Fläche

## Разбор самостоятельных задач

Открывайте после собственной попытки. Номера соответствуют листу самостоятельных задач и этому же уроку курса.

Учебная формулировка архивной задачи и дополнительная аналогичная задача.

## Основная задача

Gegeben ist  $f_a(x) = 1 - a \cos(x/2)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . a) Bestimmen Sie  $a$  so, dass der Graph an der Stelle  $x = \pi/3$  die Steigung  $1/4$  hat. b) Bestimmen Sie für  $f(x) = 1 - \cos(x/2)$  die Extrempunkte und deren Art im offenen Intervall  $(-\pi, 3\pi)$ . c) Die Gerade  $g(x) = x/\pi$  schneidet den Graphen von  $f$  bei  $x = 0, \pi$  und  $2\pi$ ; weitere Schnittpunkte gibt es auf  $[0, 2\pi]$  nicht. Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen den Graphen in diesem Intervall.

Перевод: Дано  $f_a(x) = 1 - a \cos(x/2)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . a) Найдите  $a$ , если при  $x = \pi/3$  наклон равен  $1/4$ . b) Для  $f(x) = 1 - \cos(x/2)$  найдите экстремумы и их тип на открытом интервале  $(-\pi, 3\pi)$ . c) Прямая  $g(x) = x/\pi$  пересекает  $f$  в  $x = 0, \pi, 2\pi$ ; других пересечений на  $[0, 2\pi]$  нет. Найдите площадь между графиками на этом отрезке.

Для заданного наклона нужна производная. По правилу сложной функции  $f'_a(x) = (a/2)\sin(x/2)$ . При  $x = \pi/3$  синус равен  $1/2$ , поэтому  $a/4 = 1/4$  и  $a = 1$ .

В части b решаем  $f'(x) = 0$ : получаются  $x = 2k\pi$ . Из них внутри открытого интервала  $(-\pi, 3\pi)$  находятся только  $0$  и  $2\pi$ . Вторая производная  $f''(x) = \cos(x/2)/4$  положительна при  $0$  и отрицательна при  $2\pi$ . Подставляя эти абсциссы в  $f$ , находим минимум  $T(0|0)$  и максимум  $H(2\pi|2)$ .

Для площади используем заданные пересечения  $0, \pi$  и  $2\pi$ . Между  $0$  и  $\pi$  выше прямая  $g$ , между  $\pi$  и  $2\pi$  — функция  $f$ . Это можно проверить пробными точками: других пересечений внутри по условию нет.

Первообразная разности  $f - g$  равна  $F(x) = x - 2\sin(x/2) - x^2/(2\pi)$ . У неё  $F(0) = F(2\pi) = 0$ , а  $F(\pi) = \pi/2 - 2$ . Первый интеграл разности отрицателен, поэтому для площади меняем его знак; второй уже положителен. Каждая часть имеет площадь  $2 - \pi/2$ , вместе  $A = 4 - \pi \approx 0,8584$  FE.

Проверка: Сверьте контрольные точки в уроке.

## Аналогичная задача

Дано  $f_a(x) = 2 - a \cos x$ . а) Наклон при  $\pi/6$  равен 1, найдите  $a$ . б) При  $a=2$  найдите экстремумы на  $(-\pi/2, 3\pi/2)$ . в) Найдите площадь между  $f_2$  и  $g=4x/\pi$  на  $[0, \pi]$ ; точки пересечения  $0, \pi/2, \pi$ , других нет.

$f'_a = a \sin x$ , поэтому  $a/2 = 1$ ,  $a=2$ .  $f''_2 = 2 \cos x$ :  $T(0|0)$ ,  $H(\pi|4)$ . Первообразная  $f_2 - g$ :  $F = 2x - 2 \sin x - 2x^2/\pi$ .  $F(0) = F(\pi) = 0$ ,  $F(\pi/2) = \pi/2 - 2$ . Площадь  $2(2 - \pi/2) = 4 - \pi$  ЕЕ.

Проверка: Несмотря на другое растяжение графика, площадь здесь совпала из-за взаимно обратных масштабов по осям.

Если ответ не совпал: Если интеграл дал 0, повторите контрольные точки основного разбора.