Trigonometrie im Dreieck

Разбор самостоятельных задач

Открывайте после собственной попытки. Номера соответствуют листу самостоятельных задач и этому же уроку курса.

Авторский практикум курса.

Задача 1

Лестница длиной 5 м образует с горизонтальной землёй угол 68° и опирается на вертикальную стену. Найдите высоту опоры и расстояние основания до стены.

Обозначим высоту h и горизонтальное расстояние d. Относительно угла 68° высота — противолежащий катет, d — прилежащий.

Запишем отношения: $h/5=\sin 68°$, $d/5=\cos 68°$.

$h=5\sin 68°\approx 4{,}6359$ м; $d=5\cos 68°\approx 1{,}8730$ м. Округлённый ответ: $h\approx 4{,}64$ м, $d\approx 1{,}87$ м.

Проверка: $h^2+d^2=25$ м² до округления.

Если ответ не совпал: Если поменяли h и d, повторите противоположный и прилежащий катеты в первом разделе.

Задача 2

In einem Dreieck sind b=7 cm, c=9 cm und α=60° gegeben. Berechnen Sie a, β, γ und den Flächeninhalt.

Перевод: В треугольнике b=7 см, c=9 см, α=60°. Найдите a, β, γ и площадь.

Даны две стороны и угол между ними: $a^2=7^2+9^2-2\cdot 7\cdot 9\cos 60°=67$. Значит $a=\sqrt{67}\approx 8{,}19$ см.

Теперь известны три стороны. Для угла β: $\cos\beta=(a^2+c^2-b^2)/(2ac)=99/(18\sqrt{67})$, поэтому $\beta\approx 47{,}78°$.

$\gamma=180°-60°-\beta\approx 72{,}22°$. Не округляйте β до расчёта γ.

$F=\tfrac{1}{2}\cdot 7\cdot 9\cdot\sin 60°=63\sqrt{3}/4\approx 27{,}28$ см².

Проверка: $\beta+\gamma=120°$, $|9-7|<\sqrt{67}<16$.

Если ответ не совпал: Если использовали закон синусов без известной противоположной пары, повторите пример 1.

Задача 3

Дано c=10 см, α=45°, β=75°. Найдите γ, a, b и площадь.

Третий угол γ=180°−45°−75°=60°. Полностью известна противоположная пара c=10 см и γ=60°.

a=10sin45°/sin60°≈8,16 см; b=10sin75°/sin60°≈11,15 см.

Между a и b лежит γ, поэтому F=ab sin60°/2≈39,43 см². Подставляйте неокруглённые длины.

Проверка: Самая длинная сторона b лежит напротив наибольшего угла 75°.

Если ответ не совпал: Если перепутали пары, заново подпишите стороны напротив углов.

Задача 4

In einem Dreieck sind a=7 cm, b=10 cm und α=30° gegeben. Bestimmen Sie alle zulässigen Werte von β, γ und c sowie die zugehörigen Flächeninhalte.

Перевод: Дано a=7 см, b=10 см, α=30°. Найдите все допустимые β,γ,c и площади.

sinβ=b sinα/a=10·½/7=5/7.

$\beta_1\approx45{,}58°$, $\beta_2\approx134{,}42°$; $\gamma_1\approx104{,}42°$, $\gamma_2\approx15{,}58°$. Оба γ положительны.

Для каждой ветви c=7sinγ/sin30°=14sinγ. Получаем $c_1=5\sqrt{3}+2\sqrt{6}\approx13{,}56$ см, $c_2=5\sqrt{3}-2\sqrt{6}\approx3{,}76$ см.

$F_i=\frac{1}{2}\cdot10\cdot c_i\cdot\sin30°=2{,}5c_i$. Площади примерно 33,90 и 9,40 см².

Проверка: Оба γ положительны; обе тройки сторон удовлетворяют неравенству треугольника.

Если ответ не совпал: Если найдено одно решение, повторите пример 2.

Задача 5

Выпуклый ABCD имеет AB=40 м, BC=30 м, AD=35 м, ∠ABC=90°, ∠CAD=60°. Вершины B и D лежат по разные стороны диагонали AC. Найдите AC, CD, площадь и периметр.

В прямоугольном ABC: $AC=\sqrt{40^2+30^2}=50$ м.

В ACD известны две стороны и угол между ними: $CD^2=50^2+35^2-2\cdot50\cdot35\cos60°=1975$. Значит $CD=5\sqrt{79}\approx44{,}44$ м.

Треугольники лежат по разные стороны AC: $F=40\cdot30/2+50\cdot35\sin60°/2=600+875\sqrt{3}/2\approx1357{,}77$ м².

Периметр идёт по внешней границе: $U=40+30+35+5\sqrt{79}\approx149{,}44$ м.

Проверка: Диагональ AC входит в расчёт площади и CD, но не в периметр.

Если ответ не совпал: Если прибавили AC к U, повторите «От треугольника к участку».

Задача 6

Gegeben sind b=10 cm und α=30°. Bestimmen Sie jeweils die Anzahl der möglichen Dreiecke für a=4 cm, a=5 cm und a=10 cm. Berechnen Sie für a=5 cm zusätzlich β, γ und c.

Перевод: При b=10 см, α=30° определите число треугольников для a=4, a=5 и a=10 см. Для a=5 найдите β,γ,c.

Для a=4: sinβ=5/4=1,25>1. Треугольника нет.

Для a=5: sinβ=1, поэтому β=90° — один кандидат. γ=60°, c=5sin60°/sin30°=5√3≈8,66 см.

Для a=10: sinβ=0,5. Кандидат β=30° подходит; β=150° даёт γ=0° и исключается. Остаётся одно решение.

Числа решений по порядку: 0,1,1.

Проверка: Числа решений по порядку: 0,1,1.

Если ответ не совпал: Если при sinβ=1 насчитали два решения, повторите правило совпадающих ветвей.