

Funktionenschar & Rotation

Разбор самостоятельных задач

Открывайте после собственной попытки. Номера соответствуют листу самостоятельных задач и этому же уроку курса.

Учебная формулировка архивной задачи и дополнительная аналогичная задача.

Основная задача

Gegeben ist $h_a(x) = (x-3)^a + 1$. a) Beschreiben Sie für positive ganze Werte von a das Verhalten für $x \rightarrow -\infty$ getrennt für gerade und ungerade a . b) Nun gilt $a = -1$. Die von dem Graphen und den Koordinatenachsen im Bereich $0 \leq x \leq 2$ begrenzte Fläche rotiert um die y -Achse. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers. Auf allen Achsen gelten dieselben Längeneinheiten.

Перевод: Дано $h_a(x) = (x-3)^a + 1$. а) При положительном целом a опишите поведение при $x \rightarrow -\infty$ отдельно для чётных и нечётных a . б) Теперь $a = -1$. Область, ограниченная графиком, осями x и y на $0 \leq x \leq 2$, вращается вокруг y . Найдите объём. Координатные единицы одинаковы по всем осям.

При $x \rightarrow -\infty$ основание $x-3$ отрицательно и неограниченно растёт по модулю. Положительная чётная степень даёт предел $+\infty$, нечётная — $-\infty$; прибавление 1 этот вывод не меняет.

Теперь $a = -1$, и $h(x) = 1 + 1/(x-3)$. На границе области находятся точки $(0|2/3)$ и $(2|0)$. Поскольку вращение идёт вокруг y , выразим горизонтальное расстояние до графика через высоту: $y-1 = 1/(x-3)$, откуда $x = 3 + 1/(y-1)$. На высотах $0 \leq y \leq 2/3$ это радиус круглого сечения.

Поэтому $V = \pi \int_0^{2/3} (3 + 1/(y-1))^2 dy$. Раскрывая квадрат, получаем первообразную $9y + 6 \ln|y-1| - 1/(y-1)$. Разность её значений на границах равна $8 - 6 \ln 3$, значит $V = \pi(8 - 6 \ln 3) \approx 4,42 \text{ VE}$.

Для независимой проверки можно вращать вертикальные полоски как оболочки:
 $V = 2\pi \int_0^2 x(1 + 1/(x-3)) dx$. Получается тот же объём.

Проверка: Сверьте контрольные точки в уроке.

Аналогичная задача

Для $k(x) = 1 + 1/(x-2)$ область между графиком и осями на $0 \leq x \leq 1$ вращают вокруг y . Найдите объём.

$k(0) = 1/2$, $k(1) = 0$. $V = \pi \int_0^{1/2} (2 + 1/(y-1))^2 dy$. Первообразная $4y + 4 \ln|y-1| - 1/(y-1)$. Разность $3 - 4 \ln 2$, $V = \pi(3 - 4 \ln 2) \approx 0,71 \text{ VE}$.

Проверка: Оболочки $2\pi \int_0^1 xk(x) dx$ дают тот же ответ.

Если ответ не совпал: Если не совпали границы, повторите контрольные точки основного разбора.