Kurvendiskussion: полный алгоритм

Разбор самостоятельных задач

Открывайте после собственной попытки. Номера соответствуют листу самостоятельных задач и этому же уроку курса.

Авторский практикум курса.

Задача 1

Для $f=x^2-4x+3$ найдите нули и вершину, интервалы монотонности.

$f=(x-1)(x-3)=(x-2)^2-1$. Нули 1,3; $f'=2x-4$ меняет знак − на + при 2. T(2|−1), убывает на $(-\infty,2)$, возрастает на $(2,\infty)$.

Проверка: $f''=2>0$.

Если ответ не совпал: Если вершина указана без y, повторите «Экстремум и перегиб».

Задача 2

Untersuchen Sie für $f(x)=x^3$, ob der Punkt (0|0) ein Extrempunkt oder ein Wendepunkt ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Перевод: Для $f=x^3$ выясните, является ли (0|0) экстремумом или перегибом.

$f'=3x^2\geq 0$ и знак не меняется: экстремума нет. $f''=6x$ меняет − на +, поэтому (0|0) — стационарная точка перегиба.

Проверка: $f(-1)=-1<0<f(1)=1$, поэтому в нуле нет максимума или минимума.

Если ответ не совпал: Если $f'=0$ было единственным доказательством, повторите второй раздел.

Задача 3

Найдите область, нуль и асимптоты $f(x)=(2x+1)/(x-1)$.

$D=R\setminus\{1\}$. Нуль $x=-1/2$. Вертикальная асимптота $x=1$, горизонтальная $y=2$. $f(0)=-1$.

Проверка: При больших $|x|$ дробь $3/(x-1)$ стремится к 0.

Если ответ не совпал: Если включили x=1 в область, повторите «Каркас исследования».

Задача 4

Bestimmen Sie für $f(x)=x^4-2x^2$ alle stationären Punkte und untersuchen Sie deren Art.

Перевод: Для $f=x^4-2x^2$ найдите все стационарные точки и их типы.

Кандидаты $-1,0,1$. $f''=12x^2-4$; при ±1 равно $8>0$, при 0 равно $-4<0$. Минимумы $(-1|-1),(1|-1)$, максимум $(0|0)$.

Проверка: $f=(x^2-1)^2-1\geq-1$ подтверждает глобальность двух минимумов.

Если ответ не совпал: Если пропал корень $x=0$, не делите производную на x; повторите факторизацию.

Задача 5

Для $f=\sqrt{x}(4-x)$ найдите область, нули, внутренний экстремум и перегибы.

$D=[0,\infty)$; нули 0,4. $f'=2/\sqrt{x}-(3/2)\sqrt{x}=(4-3x)/(2\sqrt{x})$. Максимум при $x=4/3$, $y=16/(3\sqrt{3})$. $f''=-x^{(-3/2)}-(3/4)x^{(-1/2)}<0$ для $x>0$, перегибов нет. При 0 функция имеет односторонний локальный минимум на своей области, хотя производная там не конечна.

Проверка: f' меняет + на – при $4/3$; при $x\to\infty$ $f\to-\infty$.

Если ответ не совпал: Если потеряли точку 0 из области из-за производной, повторите первый раздел.

Задача 6

Untersuchen Sie die Funktion $f(x)=x^3-6x^2+9x$. Bestimmen Sie die Nullstellen, die Extrempunkte und den Wendepunkt.

Перевод: Проведите исследование $f=x^3-6x^2+9x$: нули, экстремумы и перегиб.

$D=R$. Нули 0 и 3 (двойной). f' имеет знаки $+,-,+$; $H(1|4)$, $T(3|0)$. $f''=6x-12$, $W(2|2)$, знак меняется при 2. Возрастает на $(-\infty,1),(3,\infty)$, убывает на $(1,3)$. Пределы задаёт x^3.

Проверка: В двойном нуле 3 график касается оси x, что согласуется с минимумом.

Если ответ не совпал: Если нарисовали пересечение оси в 3, сопоставьте нуль и тип экстремума.