

Extremwertaufgaben

Разбор самостоятельных задач

Открывайте после собственной попытки. Номера соответствуют листу самостоятельных задач и этому же уроку курса.

Авторский практикум курса.

Задача 1

У прямоугольника периметр 28 м. Найдите размеры и максимальную площадь.

$y=14-x$; $A=14x-x^2$, $0<x<14$. $A'=14-2x=0$ даёт $x=y=7$. $A=49$ м², $A''=-2<0$, граничные пределы нулевые.

Проверка: $A=49-(x-7)^2\leq 49$.

Если ответ не совпал: Если максимизировали периметр, повторите «Цель и ограничение».

Задача 2

Für drei Seiten eines rechteckigen Grundstücks stehen 40 m Zaun zur Verfügung. Die vierte Seite liegt an einer geraden Mauer und benötigt keinen Zaun. Bestimmen Sie die Seitenlängen und den maximalen Flächeninhalt.

Перевод: Есть 40 м ограды для трёх сторон прямоугольного участка у прямой стены. Найдите максимальную площадь и размеры.

$2x+y=40$, $A=x(40-2x)$, $0<x<20$. $A'=40-4x=0$: $x=10$, $y=20$. $A=200$ м². $A''=-4<0$, на границах $A\rightarrow 0$.

Проверка: Расход ограды $2\cdot 10+20=40$ м.

Если ответ не совпал: Если записали $2x+2y$, повторите условие о трёх сторонах.

Задача 3

Из квадратного листа 12×12 см вырезают по углам квадраты стороны x и сгибают открытую коробку. Найдите x и максимальный объём.

$V=x(12-2x)^2$. $V'=(12-2x)(12-6x)$. Внутренний кандидат $x=2$; $x=6$ — вырождение. Производная меняется с + на – при 2, у границ $V\rightarrow 0$. Размеры $8\times 8\times 2$ см, $V=128$ см³.

Проверка: Подстановка $x=2$ в исходную формулу даёт $2\cdot 64=128$.

Если ответ не совпал: Если взяли $x=6$, повторите «Допустимый интервал».

Задача 4

Bestimmen Sie den Punkt der Geraden $y=x+1$ mit dem kleinsten Abstand zum Koordinatenursprung.

Перевод: Найдите точку прямой $y=x+1$, ближайшую к началу координат.

$D=2x^2+2x+1$, $x \in \mathbb{R}$. $D'=4x+2=0$: $x=-1/2$, $y=1/2$. $D=2(x+1/2)^2+1/2 \geq 1/2$. Минимальное расстояние $\sqrt{1/2}=1/\sqrt{2}$ LE.

Проверка: Радиус-вектор $(-1/2, 1/2)$ перпендикулярен направлению $(1, 1)$.

Если ответ не совпал: Если ответом стал квадрат расстояния, пересчитайте «Доказать и интерпретировать».

Задача 5

Для $A(x)=x^3-3x$ на $[0, 3]$ найдите глобальные минимум и максимум.

$A'=3x^2-3$, внутренний корень $x=1$. Значения $A(0)=0$, $A(1)=-2$, $A(3)=18$. Минимум -2 при 1 , максимум 18 при 3 .

Проверка: На $(0, 1)$ функция убывает, на $(1, 3)$ возрастает.

Если ответ не совпал: Если проверили только $A'=0$, повторите «Допустимый интервал».

Задача 6

Eine geschlossene zylindrische Dose soll ein Volumen von 54π cm³ und eine möglichst kleine Oberfläche haben. Bestimmen Sie den Radius r und die Höhe h .

Перевод: Закрытая цилиндрическая банка объёма 54π см³ должна иметь минимальную площадь поверхности. Найдите r и h .

$h=54/r^2$, $r>0$. $S=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+108\pi/r$. $S'=4\pi r-108\pi/r^2=0$ даёт $r^3=27$, $r=3$, $h=6$. $S=54\pi$ см². При $r \rightarrow 0+$ и $r \rightarrow \infty$ $S \rightarrow \infty$; единственный кандидат — глобальный минимум.

Проверка: $h=2r$ и $\pi \cdot 9 \cdot 6=54\pi$ см³.

Если ответ не совпал: Если пропала крышка или дно, снова запишите исходную S до подстановки.